SLI, suite et introduction aux transformées de Fourier

Saïd Ladjal: ladjal@telecom-paristech.fr

Récapitulatif de la séance précédente

- Si T est un opérateur linéaire et invariant par translation (SLI) alors
  - Il est caractérisé par une réponse impulsionnelle.
  - Il est aussi caractérisé par sa réponse fréquentielle (ou gain fréquentiel).

- La réponse impulsionnelle définit l’action du SLI au travers de l’opération de convolution.
- La réponse fréquentielle définit le SLI au travers de son action sur les ondes de Fourier.

- Les ondes de Fourier de fréquence ν ont l’expression suivante

$$\text{Sur } \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{2i\pi\nu x} \quad (\nu \in \mathbb{R})$$

$$\text{Sur } \mathbb{Z}, \quad n \mapsto e^{2i\pi\nu n} \quad (\nu \in [-1/2, 1/2[)$$

Lien entre réponses impulsionnelles et fréquentielles

- Si T est un SLI de réponse impulsionnelle h et de réponse fréquentielle C, on a

Sur R: $$C(\nu) = \int h(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

Sur Z: $$\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ C(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-2i\pi\nu n}$$

Les signaux finis

- Ce sont des signaux définis sur {0,...,N-1}
- Pour refaire la théorie des SLI pour ces signaux il suffit de définir:
  - Opérations linéaires (banal)
  - Le décalage (translation sur l'ensemble {0,...,N-1})
  - Les ondes de Fourier

Décalage d’un signal fini

$(u^m)_n = u_{n-m}$ pour les suites

Pour les signaux fini, n-m peux ne pas appartenir à $\{0,1, \ldots\ N-1\}$

Solution : redéfinition de la somme (et différence) en $\{0,1, \ldots\ N-1\}$

$$n \square m \ = \ (n+m) \text{ Mod } N$$

Décalage d'un signal fini

$$(u^m)_n = u_{(n-m)\mathrm{Mod\ N}}$$

Interprétation : on définit la *suite* $\tilde{u}_n = \ u n_{\ \mathrm{Mod}\ N}$

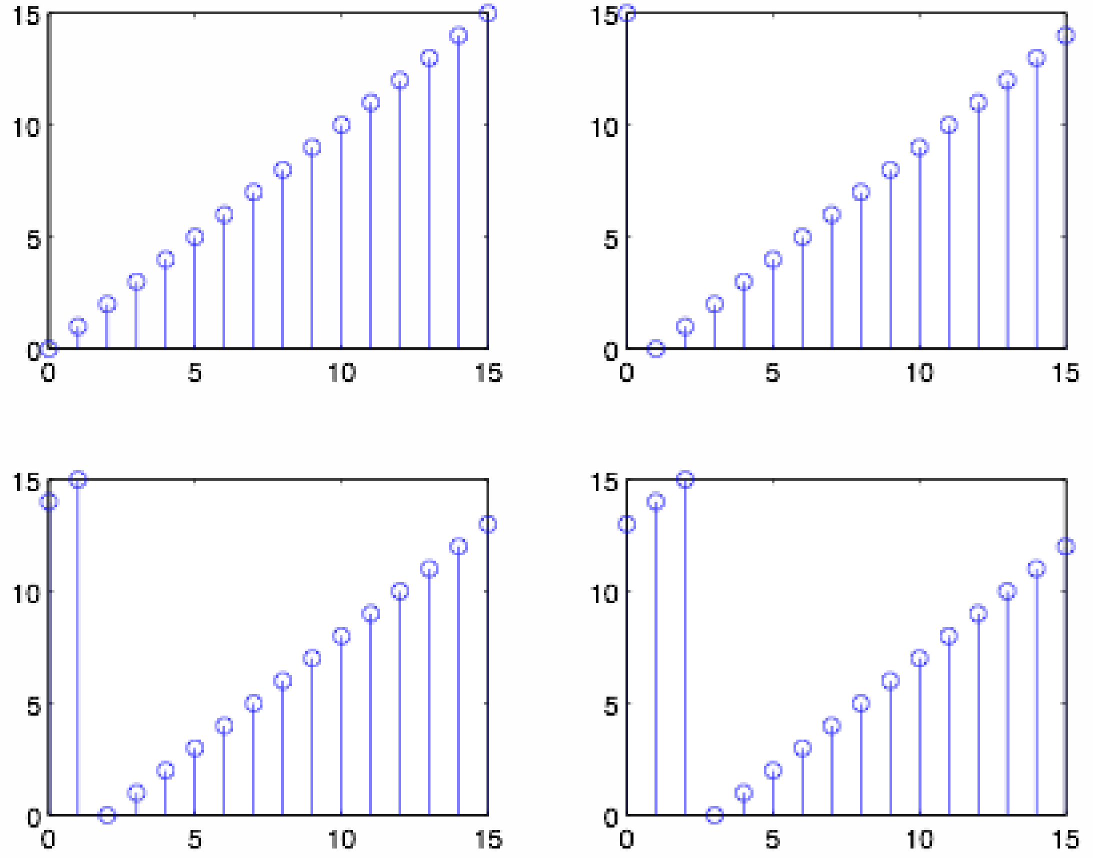
Un période de $\tilde{u}$ coïncide avec u

On définit u^m comme un période de $\tilde{u}^m$

Cela assure que $(u^m)^{-m} = u$

Translation circulaire

La translation sur {0,...,N-1}:
plusieurs translatés d'un même signal



SLI pour les signaux fini

- Pour tout signal fini u on peut écrir

$$u = u_0\delta^0 + u_1\delta^1 + \ldots u_{N-1}\delta^{N-1} = \sum u_n\delta^n$$

Alors, pour définition de SLI,

$$v = T[u] = \sum_{m=0}^{N-1} u_m T[\delta^m] = \sum_{m=0}^{N-1} u_m h^m$$

Avec h^m version décalé de la reponse impulsionnelle $T[\delta]$

SLI pour les signaux fini

- On trouve :

$$v_n = \sum_{m=0}^{N-1} u_m (h^m)_n = \sum_{m=0}^{N-1} u_m h_{(n-m)\ \mathrm{Mod}\ N} = (u * h)_n$$

C’est la convolution circulaire ou convolution entre signaux fini

Elle a toutes les propriétés de la convolution ordinaire:

Commutativité, associativité, linéarité

Convolution circulaire et convolution ordinaire

Soient u et h des signaux finis de longueur *N*

Soit $\tilde{u}$ la suite obtenue par périodisation de u

$$\tilde{u}_n = u_{n \,\mathrm{Mod}\, N}$$

Soit v la convolution circulaire de u et v

$$v_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m u_{(n-m) \,\mathrm{Mod}\, N} = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \tilde{u}_{(n-m)}$$
$$= (h * \tilde{u})_n$$

La convolution circulaire est la convolution ordinaire avec un signal périodisé

Les ondes de Fourier sur {0,...,N-1}

- Une définition possible d'une onde de Fourier est toute fonction qui vérifie
  - Normalisation: $\varphi(0) = 1$
  - Inv. par translation:

$$\forall x, y \in \{0, \cdots N-1\},\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Formule des ondes de Fourier

- Toute onde de Fourier sur {0,...,N-1} vérifie
  - $\varphi(1)^N = \varphi(N=0) = 1$ (N=0 modulo N)
  - Donc

$$\exists k \in \{0, \cdots, N-1\},\ \varphi(n) = e^{2i\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\frac{k}{N} \text{ s'appelle la fréquence de l'onde } \varphi$$

Application d'un SLI sur les ondes de Fourier

$$\phi_n = e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$$

$$T[\phi]_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \exp\{2i\,\pi\frac{k}{N}[(n-m)\mathrm{Mod}\,N]\}$$

$$n - m\ \mathrm{Mod\ N} = \mathrm{n - m + pN}$$

$$T[\phi]_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \exp\{2i\,\pi\frac{k}{N}[(n-m)]\} =$$

$$= \phi_n \sum_{m=0}^{N-1} h_m \exp(-2i\,\pi\frac{k}{N}m) = C(k)\phi_n$$

Résumé des SLI sur {0,...,N-1}

- Tout SLI {0,...,N-1} est une convolution contre une réponse impulsionnelle, notée h,

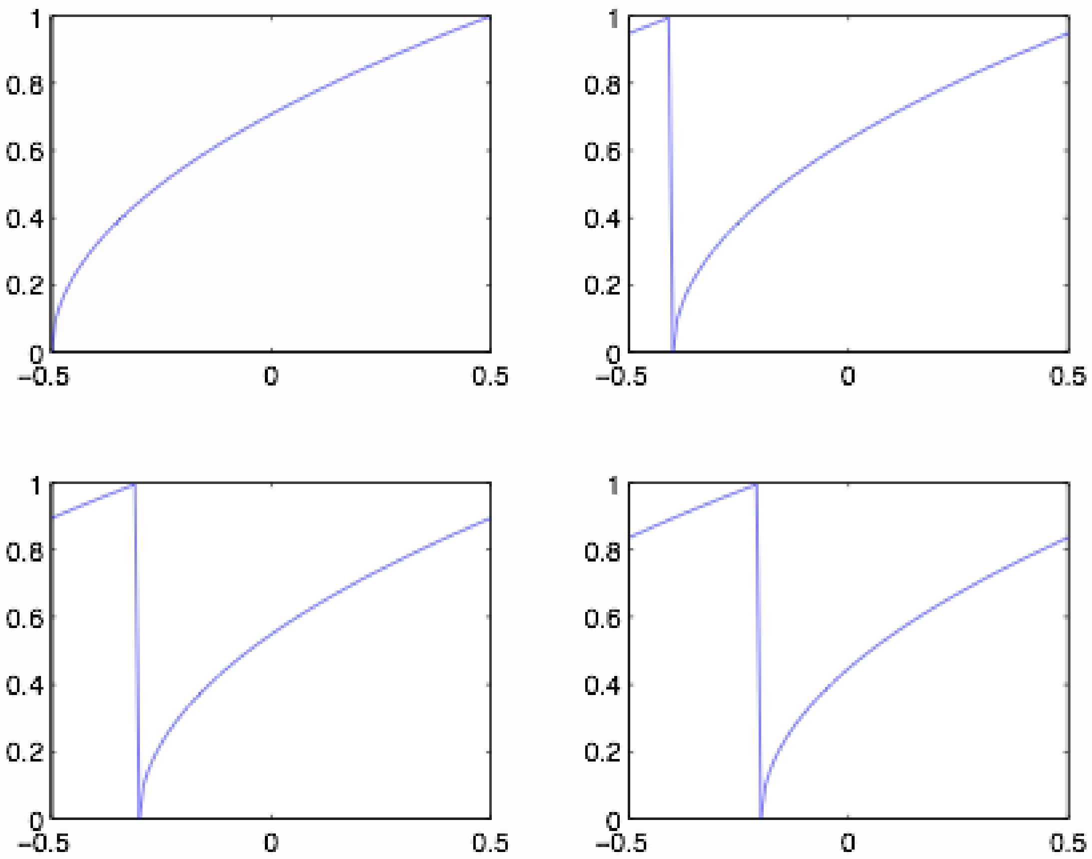
$$T(u)_n = \sum_{m \in \{0,\cdots,N-1\}} h_m u_{n-m} = \sum_{m=0}^{n} h_m u_{n-m} + \sum_{m>n} h_m u_{n-m+N}$$

- La réponse fréquentielle, notée C est indexée par {0,...,N-1} et donnée par

$$\forall k \in 0,\cdots,N-1,\ C(k) = \sum_m h_m e^{-2i\pi \frac{k}{N} m}$$

Signaux définis sur [-1/2,1/2[

$$f : x \in [-1/2, 1/2] \rightarrow f(x) \in \boldsymbol{C}$$



Translation

Les SLI sur [-1/2,1/2[

- On définit la décalage comme translation circulaire : $\tilde{f}(x+t) = f[(x+t)\mathrm{Mod}\ 1]$
- Tout SLI est alors caracterisé par une convolution circulaire :

$$T[f](x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\ h[(x-t)\ \mathrm{Mod}\ 1]dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\ \tilde{h}(x-t)dt$$

On peut donc voir la convolution circulaire comme convolution avec une fonction périodisée

Les SLI sur [-1/2,1/2[

- Leur réponse impulsionnelle est une fonction de [-1/2,1/2[.
- Montrer que l'expression des ondes de Fourier et celle de la réponse fréquentielle sont :
- $\phi(x) = \exp(2i\,\pi k x)$
- $C(k) = \int_{-1/2}^{1/2} h(t) e^{-2i\pi k t} dt$

Introduction aux transformées de Fourier

- Nous avons déjà vu quatre transformations de Fourier, ce sont les équations qui mènent de la réponse impulsionnelle d’un SLI à la réponse fréquentielle de ce même SLI.

Formule générale d'une transformation de Fourier

- On se donne un espace G
- On calcule sur cet espace la formule des ondes de Fourier
  - $\varphi(0) = 1$
  - $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$
  - On abouti à : $\varphi^{\nu}(x)=e^{2i\pi\nu x}$
- ν parcourt l'espace des fréquences de G
- La TF sur G est le produit scalaire avec son OF

Les espaces des fréquences

- L’espace des fréquences de R est R lui-même.
- L’espace des fréquences de Z est [-1/2,1/2[
- L’espace des fréquences de {0,...,N-1} est {0,...,N-1}(/N)
- L’espace des fréquences de [-1/2,1/2[est Z

Transformation de Fourier sur Z(TFtd)

ladjal@telecom-paristech.fr

Rappel sur les ondes de Fourier

- Nous avons vu que tout SLI agit sur les ondes de Fourier en les multipliant par une constante qui dépend de la fréquence. Cette constante s’appelle réponse fréquentielle.
- Elles vérifient toujours phi(x+y)=phi(x)phi(y)
- Dans le cas d’un SLI sur Z on a la formule:

$$C(\nu) = \sum h_n e^{-2i\pi\nu n}$$

C est la réponse fréquentielle et h la réponse impulsionnelle

Equations des ondes de Fourier

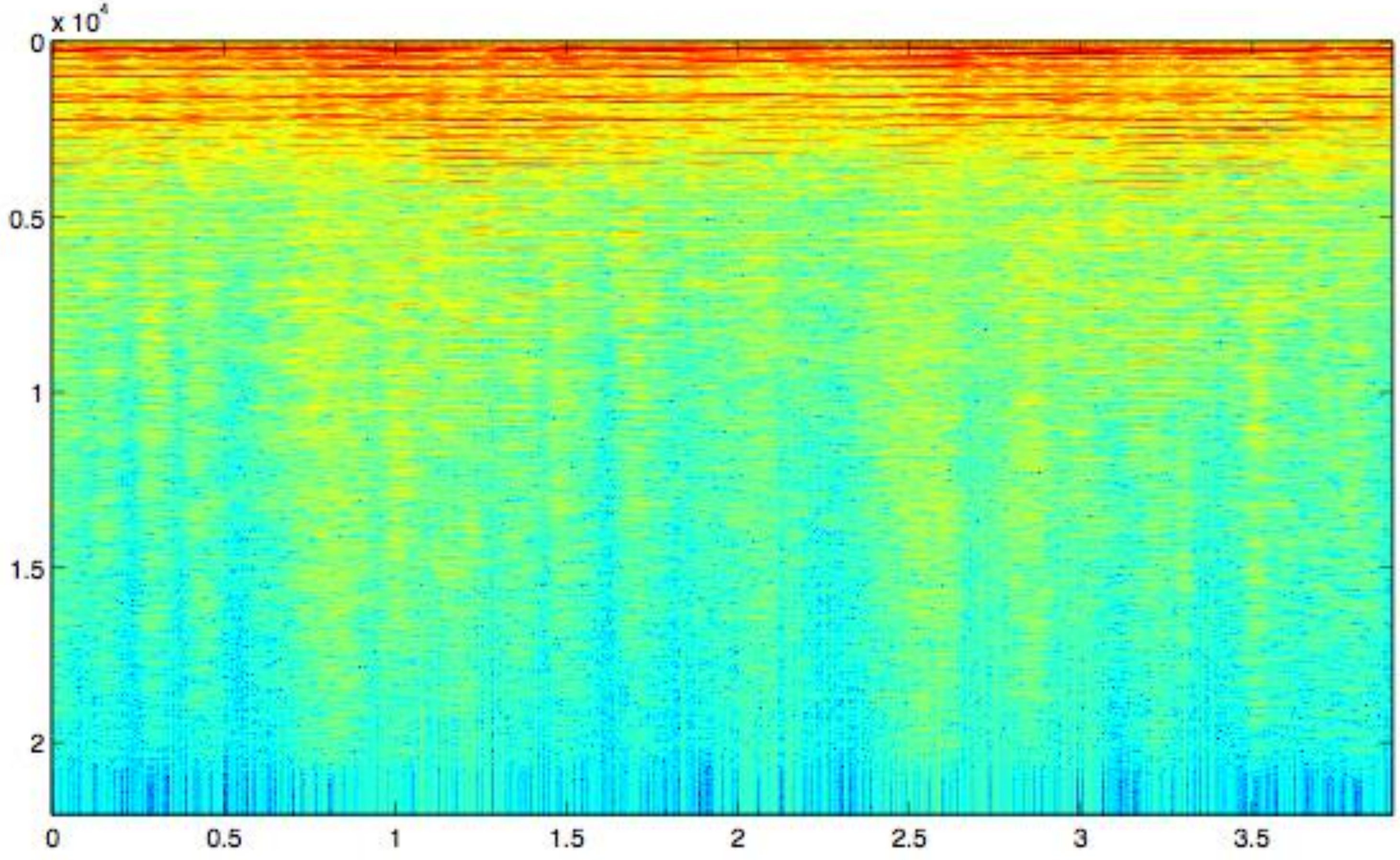
$$\text{sur } \mathbb{Z} : \ \forall \nu \in [-1/2, 1/2[, \ n \mapsto e^{2i\pi\nu n}$$

$$\text{sur } [-1/2, 1/2[: \ \forall m \in \mathbb{Z}, \ x \mapsto e^{2i\pi m x}$$

$$\text{sur } \mathbb{R} : \ \forall \nu \in \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{2i\pi\nu x}$$

$$\text{sur } \{0, \ldots, N-1\} \ : \ \forall k \in \{0, \ldots, N-1\}, \ n \mapsto e^{2i\pi \frac{k}{N} n}$$

La TF comme “décomposition” sur une base



Evolution de la décomposition spectrale d’un morceau de musique. x=le temps, y=fréquence.

La Transformée de Fourier sur Z ou Transformée de Fourier à temps Discret (TFtD)

- Les suites bornées

$$\text{noté } l^{\infty} : \|u\|_{\infty} = sup_n\{|u_n|\} < +\infty$$

- Les suites d'énergie finie

$$\text{noté } l^2 \ : \ \|u\|_2 = \sqrt{\sum_n |u_n|^2} < +\infty$$

- Les suites sommables

$$\text{noté } l^1 : \ \|u\|_1 = \sum_n |u_n| < +\infty$$

Règles de calcul

- Inclusions et Hölder

$$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$$
$$u \in l^2, v \in l^2 \Longrightarrow u.v \in l^1$$
$$u \in l^1, v \in l^\infty \Longrightarrow u.v \in l^1$$

Convolutions

- On a le tableau suivant

$*$	l^1	l^2	l^∞
l^1	l^1	l^2	l^∞
l^2	l^2	l^∞	-
l^∞	l^∞	-	-

- Règle pratique :

$$l^1 * l^p \to l^p$$
$$l^2 * l^2 \to l^\infty$$

- Dans les autres cas la convergence n'est pas assurée (exemple : convolution de 2 suites constantes)

Convolutions

- En considerant les règles de calcul,

$*$	l^1	l^2	l^∞
l^1	l^1	l^2	l^∞
l^2	l^2	l^∞	-
l^∞	l^∞	-	-

- Théorème 1.13 du chapitre 1, (extrait)
  - Tout SLI de l^∞ vers l^∞ est une convolution par une réponse impulsionnelle l^1

Définition de la TFtD pour une suite sommable

- Si u est une suite de l^1 alors on définit sa TFtD, qui est une fonction sur [-1/2,1/2[, par

$$\forall \nu \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, \qquad \mathcal{F}[u](\nu) = \hat{u}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi\nu n}$$

- $\hat{u}(\nu)$ est une fonction continue sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$
- La formule donnée est immédiatement étendue à $\mathbb{R}$, où $\hat{u}$ est **périodique** et continue

Quelques propriétés

- u et v sommables. φ onde sur Z de fréquence ν_0. ψ onde sur [-1/2, 1/2[de fréquence -m

$$(\forall n \in \mathbb{Z},\ u_n = \delta_n^m) \Longrightarrow (\forall \nu \in [-1/2, 1/2[,\ \hat{u}(\nu) = \psi(\nu) = e^{-2i\pi m\nu}$$

$$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\hat{v}$$

$$\mathcal{F}(uv) = \hat{u} * \hat{v}$$

$$[\mathcal{F}(\varphi.u)](\nu) = \hat{u}(\nu - \nu_0)$$

$$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}.\psi$$

$$u \text{ réélle } \Longrightarrow \hat{u}(-\nu) = \overline{\hat{u}(\nu)}$$

$$u_n = u_{-n} \Longrightarrow \hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$$

$$u \text{ réélle et symétrique } \Longrightarrow \hat{u} \text{ aussi}$$

Interprétation en termes de SLI

- La réponse fréquentielle est la TFtD de la réponse impulsionnelle.
- Si u et v sont les réponses impulsionnelles de deux SLI. On sait que la réponse impulsionnelle du SLI composé est $u * v$. Par ailleurs, la définition de la réponse fréquentielle est en accord avec la règle (convolution --> produit)

Extension à ℓ^2 et égalité de Parseval

- On peut étendre de ℓ^2 à ℓ^1 la définition de TFtD
- On garde la même notation
- La TFtD est une bijection entre ℓ^2 et $L^2([-1/2, 1/2[($
- On a l'égalité de Parseval

$$\sum_n |u_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{u}(\nu)|^2 d\nu$$

Extension à ℓ^2

- Nous ne faisons pas la démonstration de l'existence et unicité

$\forall u \in l^2, \forall N \in \mathbb{N}$ on considère la suite de fonctions

$$\hat{u}_N(\nu) = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{-2i\,\pi\nu n}$$

On peut montrer la convergence à un élement de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$

Égalité de Parseval

Démonstration uniquement pour suites à support fini

Soit $e_m(\nu) = \exp(2i\pi\nu m)$

On vérifie que $\int_{-1/2}^{1/2} e_m\,\bar{e}_n d\nu = \delta_{n-m}$

$$\|\hat{u}\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{u}(\nu)\overline{\hat{u}(\nu)}d\nu =$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Sigma_m u_m e_{-m} \Sigma_n \overline{u_n} e_n d\nu = \Sigma_{n,m} u_m \bar{u}_n \delta_{n-m}$$

$$= \|u\|_2^2$$

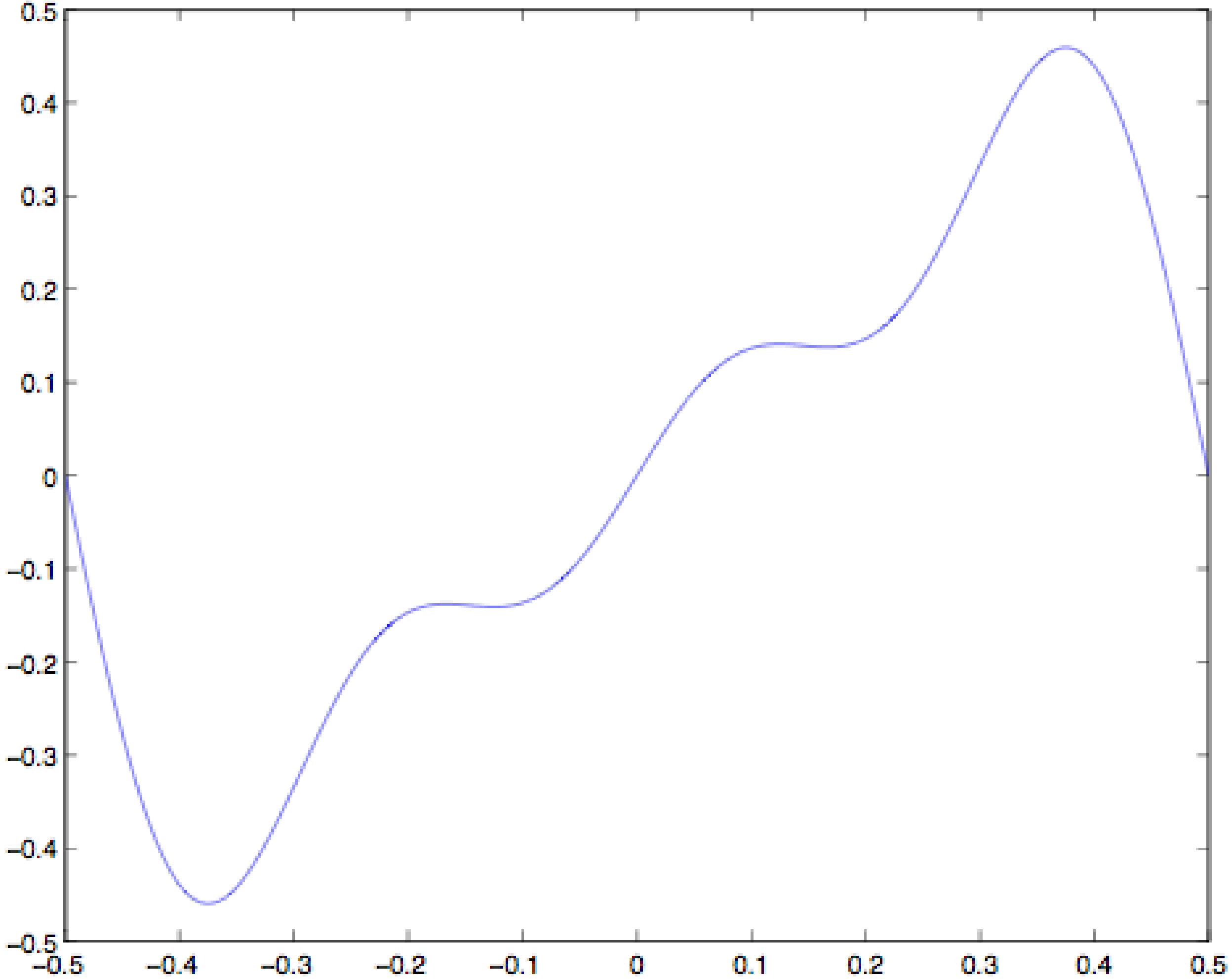
Exemple de convergence d'une série de Fourier

- Pour la suite

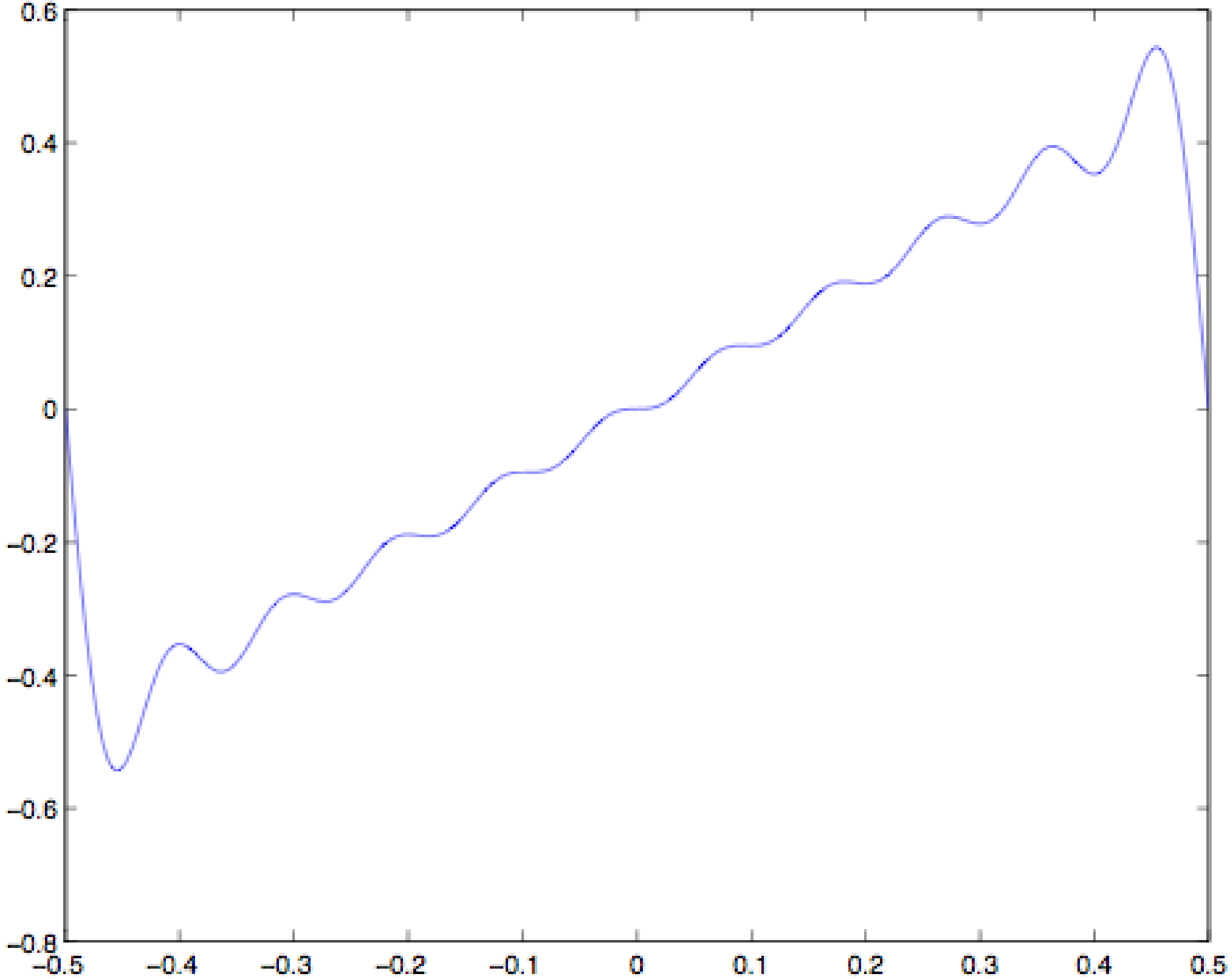
$$u_n = \frac{i(-1)^{n+1}}{2\pi}\frac{1}{n} \text{ et } 0 \text{ si } n = 0$$

- On considère les fonctions

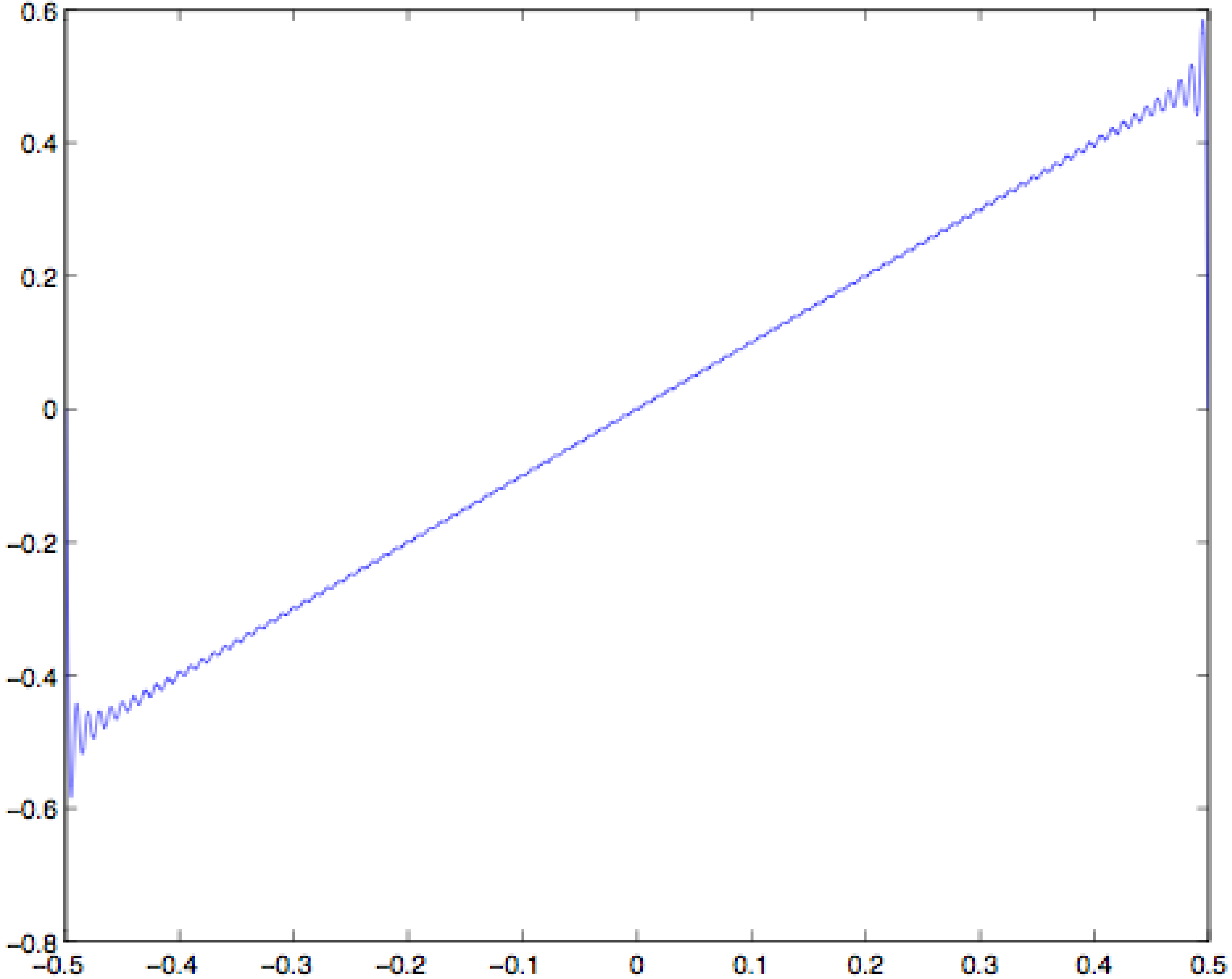
$$\nu \mapsto \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{2i\pi\nu n}$$



N=3



N=10



N=100

Quelques propriétés

- u et v en ℓ^2 . φ onde sur Z de fréquence ν_0. ψ onde sur [-1/2, 1/2[de fréquence -m

$$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\hat{v}$$

À condition que v soit sommable

$$\mathcal{F}(uv) = \hat{u} * \hat{v}$$

$$[\mathcal{F}(\varphi.u)](\nu) = \hat{u}(\nu - \nu_0)$$

$$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}.\psi$$

$$u \text{ réélle } \Longrightarrow \hat{u}(-\nu) = \overline{\hat{u}(\nu)}$$

$$u_n = u_{-n} \Longrightarrow \hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$$

$$u \text{ réelle et symétrique } \Longrightarrow \hat{u} \text{ aussi}$$

Théorème d'inversion

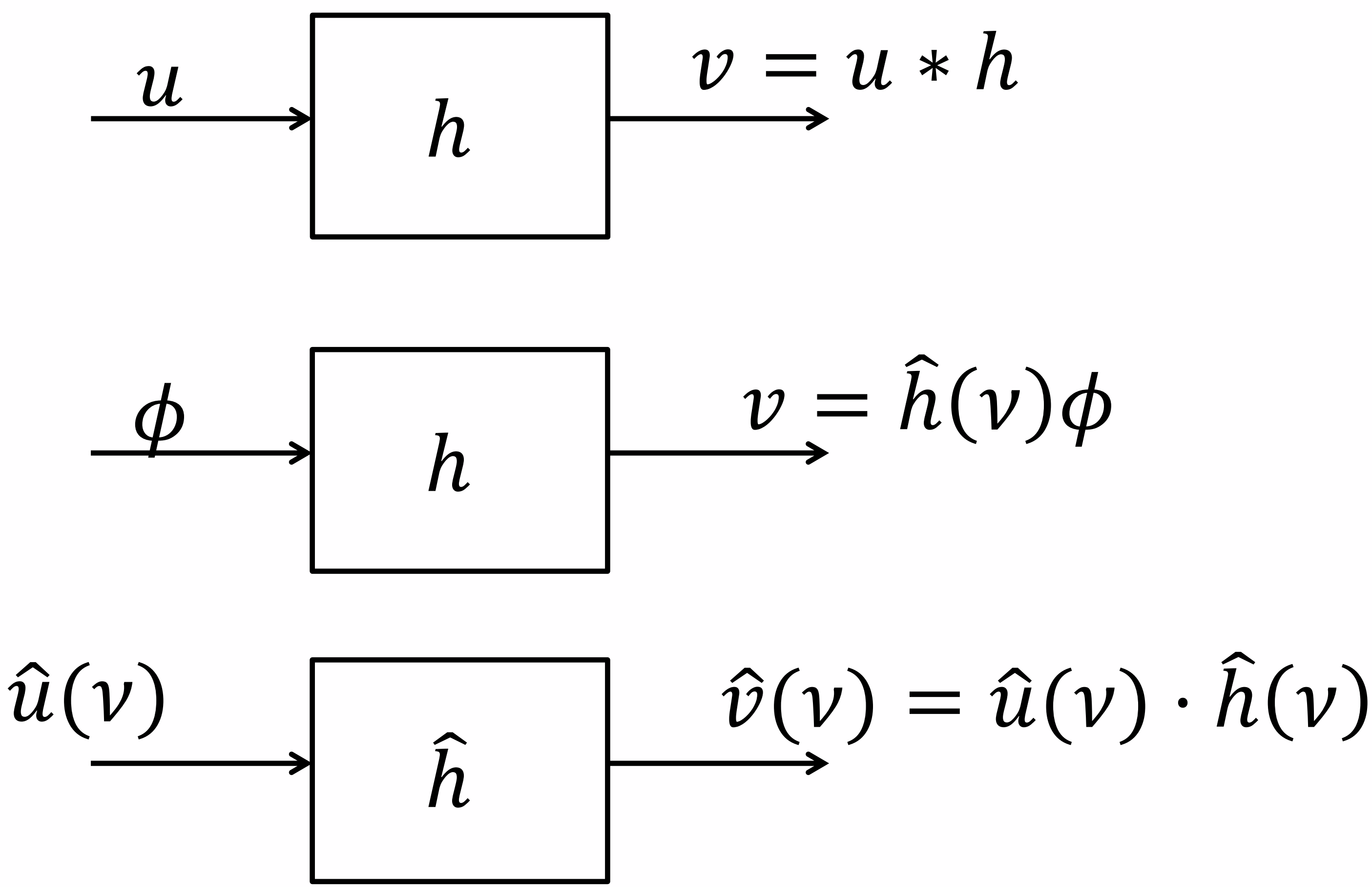
$$u_n = \int \hat{u}(\nu) e^{2i\pi n\nu} d\nu$$

Vrai pour les suites sommables et celles d'énergie finie.

u_n est donc la superposition d'O.F. avec gain $\hat{u}(\nu)$

Appliquer ce théorème à la fonction x sur [-1/2,1/2[et en déduire la valeur de la somme des $1/n^2$

Interprétation en termes de SLI



Décroissance à l'infini et régularité de la TFtD

Soit $k \geqslant 0$ *un entier, on a :*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |u_k| < \infty\right) \Longrightarrow \left(\hat{u} \textit{ est } k \textit{ fois continuement dérivable, soit } \hat{u} \in \mathcal{C}^k([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)\right)$$

et si on note v^k *la suite de terme général*

$$v_n^k = (-2i\pi n)^k u_n$$

la TFtD de v^k *est*

$$\mathcal{F}(v^k) = \mathcal{F}(u)^{(k)} \ \textit{(la dérivée k-ième de } \mathcal{F}(u) \textit{)}$$

Transformée de Fourier pour les suites finies ou Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- La TFD d'une suite définie sur {0,...,N-1} est une suite définie sur {0,...,N-1} par

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$$

- On indexe $\hat{u}$ par k, mais la fréquence des ondes correspondantes est k/N.

Théorème d'inversion

$$u_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{-2i\pi\frac{k}{N}m} \; e^{2i\pi\frac{k}{N}n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m \sum_{k=0}^{N-1} z^k \qquad z = e^{2i\pi\frac{n-m}{N}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = N\delta_{n-m}$$

Théorème d'inversion

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi \frac{k}{N} n}$$

Les $\frac{1}{N}\hat{u}_k$ sont la décompostion de u   sur la base des ondes de Fourier.

Propriétés classiques

$$u = \delta^m \Rightarrow \hat{u}_k = e^{-2i\,\pi \frac{m}{N} k}$$

$$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\,\hat{v}$$

$$\mathcal{F}(uv) = \frac{1}{N}\hat{u} * \hat{v}$$

$$\mathcal{F}(\phi u) = \hat{u}(k - k_0) \qquad \phi_n = e^{2i\,\pi \frac{k_0}{N} n}$$

$$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}_k e^{-2i\,\pi \frac{m}{N} n}$$

Propriétés de symmetrie

“Égalité” de Parseval

- Les ondes de Fourier sont orthogonales deux à deux et de norme $\sqrt{N}$ (voir démo invertibilité)
- On en déduit

$$\sum |\hat{u}_k|^2 = N \sum |u_n|^2$$

Liens entre TFD et TFtD

- La TFD est la seule transformée calculable sur ordinateur.
- Nous allons voir comment une TFD peut approximer une TFtD sous certaines hypothèses

Cas d'une suite à support fini

- Si u est définie sur $\mathbb{Z}$, et a son support dans $\{0, \dots, N-1\}$. Soit v la suite finie qui est égale à u sur $\{0, \dots, M-1\}$ avec $M \geq N$, et 0 ailleurs, on a:

$$\hat{v}_k = \hat{u}\left(\frac{k}{M}\right)$$

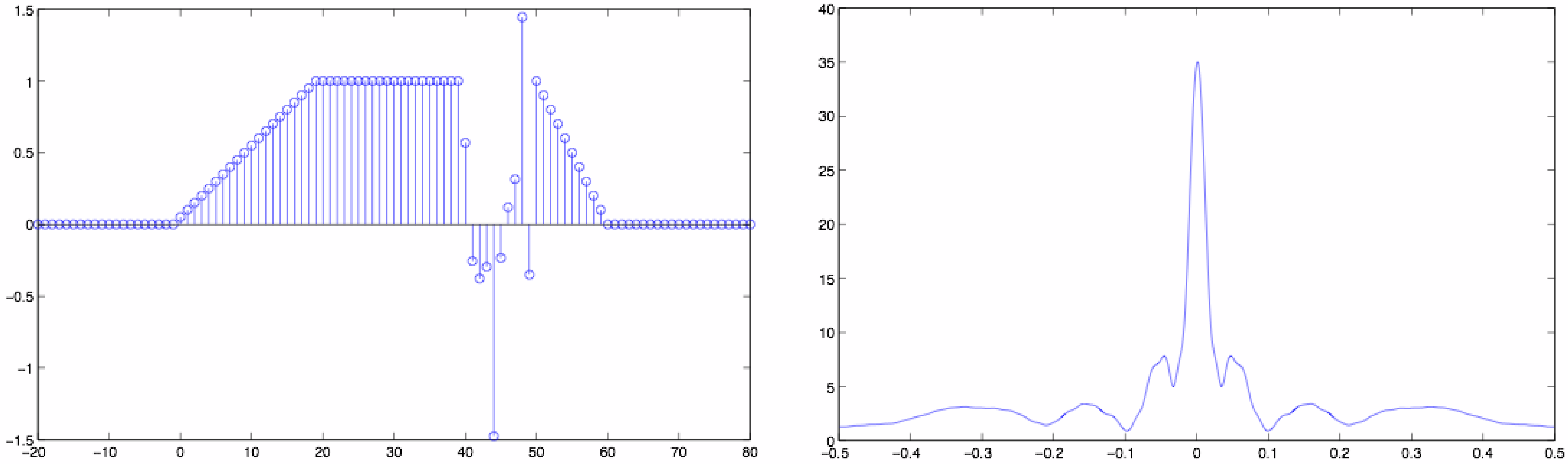
- Parfois $\hat{v}$ est nommée TFD d'ordre M de la partie non nulle de u (zero-padding)
- Donc avec un abus de langage, on peut parler de TFD d'une suite à support fini

Cas d'une suite à support fini

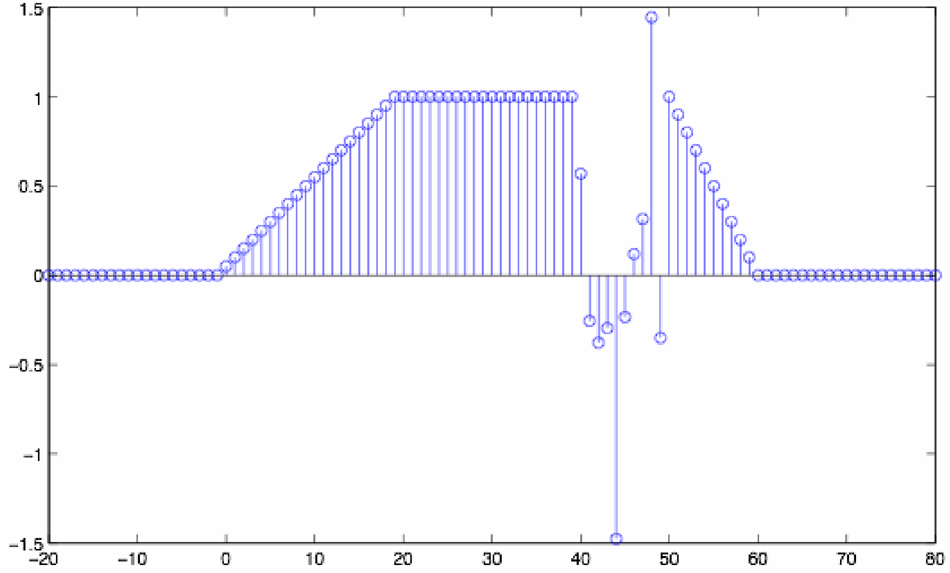
- En changeant M on peut échantillonner $\hat{u}(\nu)$ si finement qu'on le souhaite
- Cela revient à effectuer un *zero-padding*
- Toutefois, il suffit d'avoir N échantillons de $\hat{u}(\nu)$ pour la connaitre parfaitement

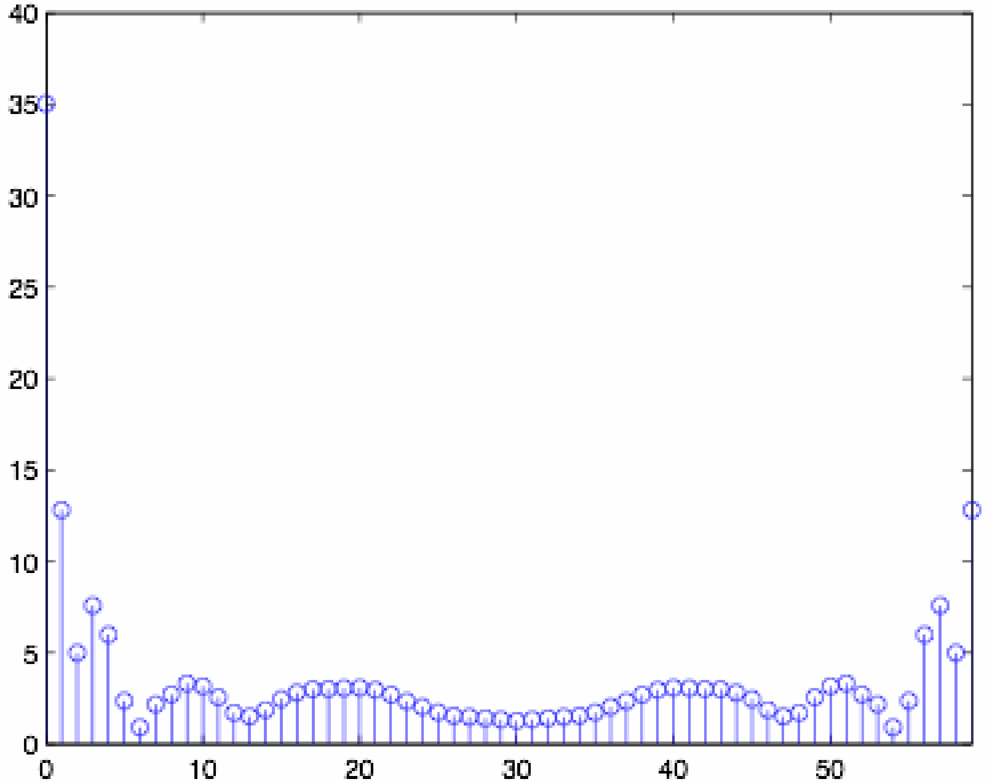
$$\left\{\hat{u}\left(\frac{k}{N}\right)\right\}_{k\in\{0,\dots,N-1\}} \xrightarrow[\mathrm{TFD-I}]{} u \xrightarrow[\mathrm{TFtD}]{} \hat{u}(\nu)$$

- Peut-on généraliser ? Quand est-ce que des échantillons pris avec pas $\frac{1}{N}$ permettent de reconstruire une fonction ?

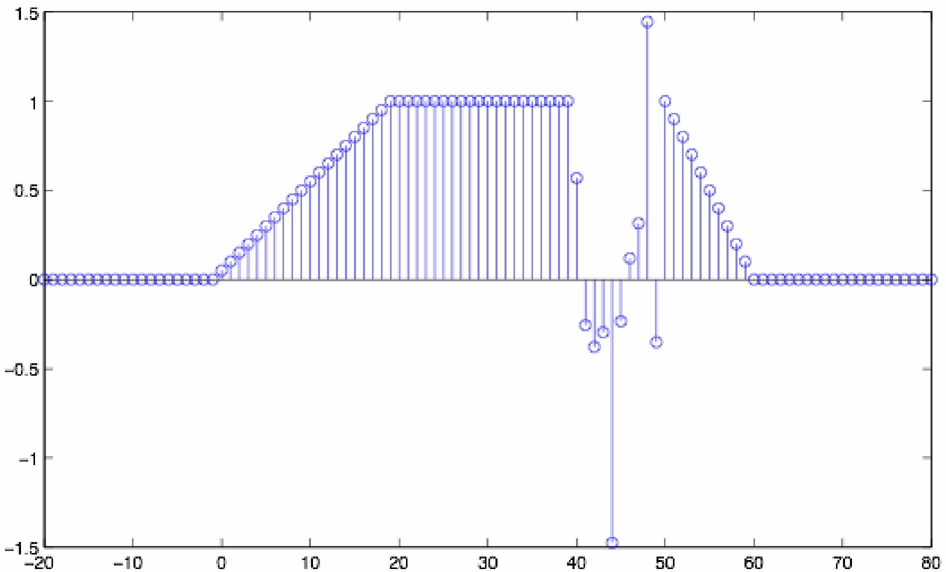


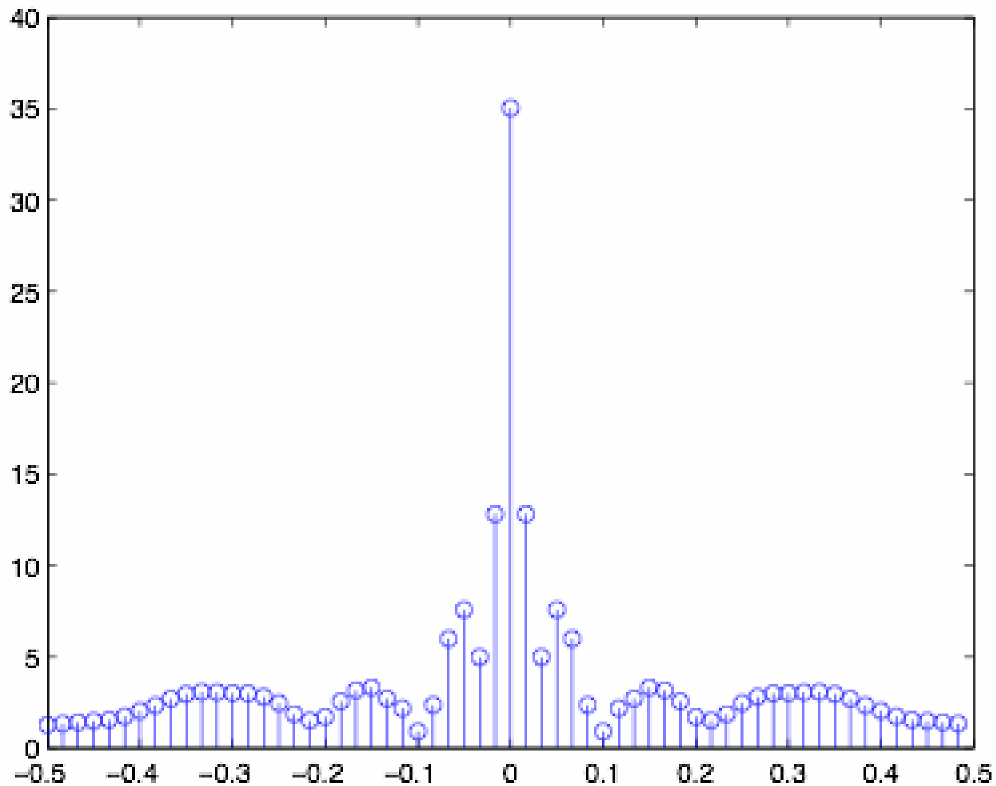
Un signal sur Z et sa TFtD (à droite)
Le support est {0, …, 59}



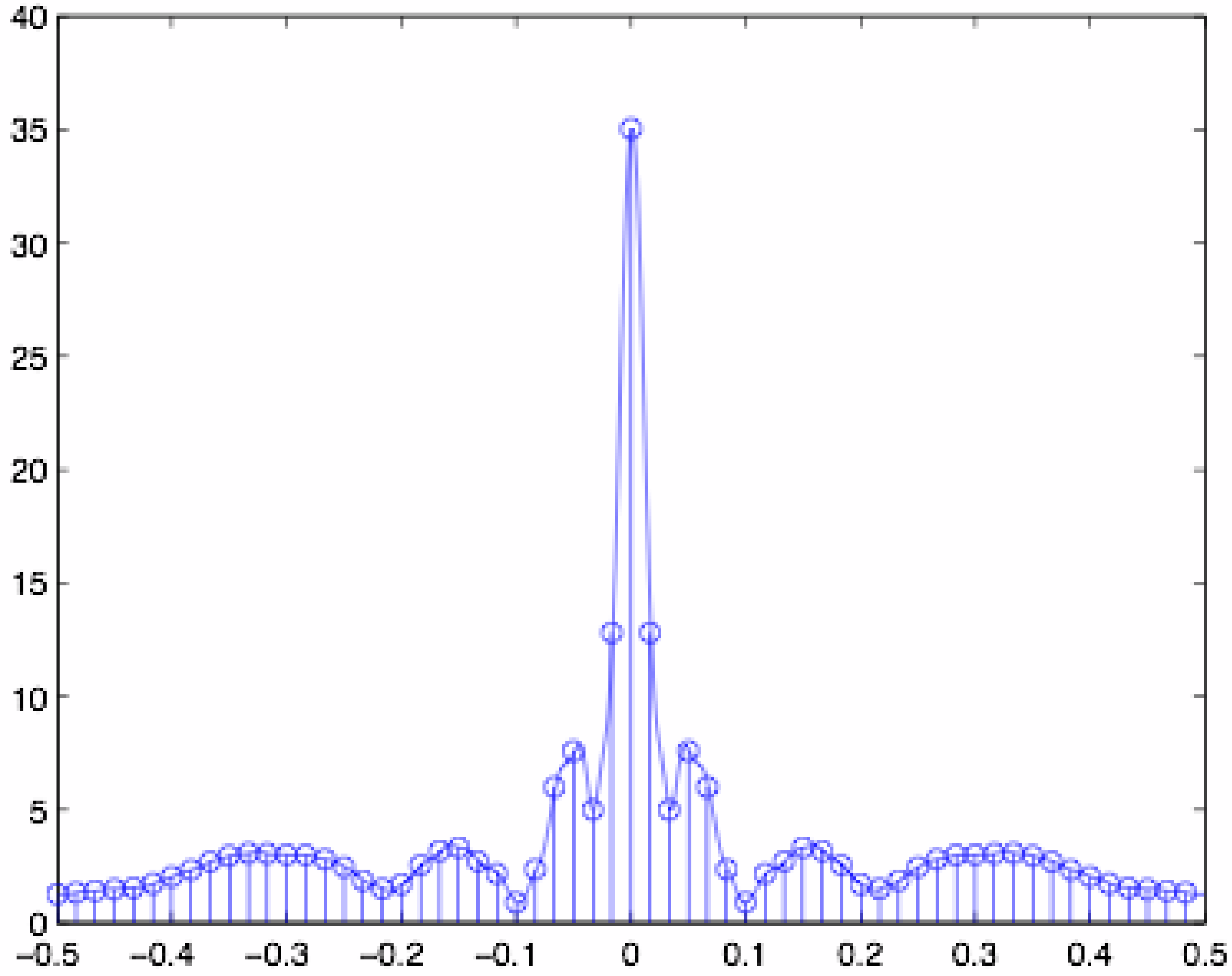


A droite: La TFD de taille 60
de la partie non nulle du signal.
Ici on a indexé par k.





A droite on a indexé par k/M et périodisé de 1 pour revenir dans -1/2,1/2



Superposition de TFD et TFtD. Des que M>=N la TFD est un échantillonnage parfait de la TFtD

Détermination de la fréquence d’une onde

- On observe N échantillons d’une onde.
- On veut à partir de ces échantillons, trouver la fréquence de l’onde.

Détermination de la fréquence d'une onde

$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = e^{2i\pi\nu_0 n}$ c-à-d., $u = \phi$, OF à fréq ν_0

On peut observer seulement un nombre fini d'échantillon : on a

$$u^T = \phi w$$

Ou w est une suite à support fini $\{0, \ldots, N-1\}$

P.e. w est le créneau :

$$w_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in \{0, \ldots N-1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Détermination de la fréquence d’une onde

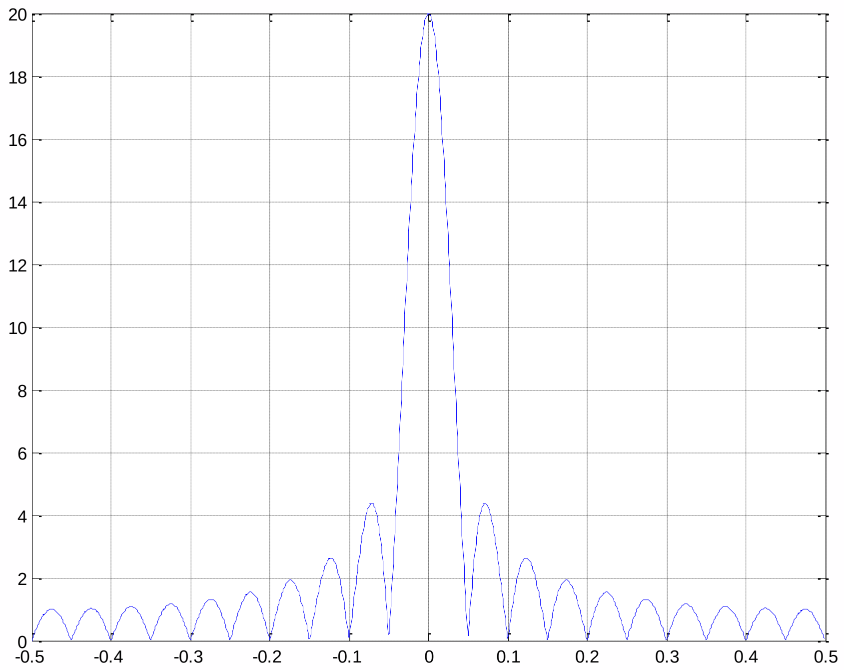
- Calculons la TFtD de u^T

$$\mathcal{F}(u^T) = \mathcal{F}(\phi w)$$
$$= w(\nu - \nu_0)$$

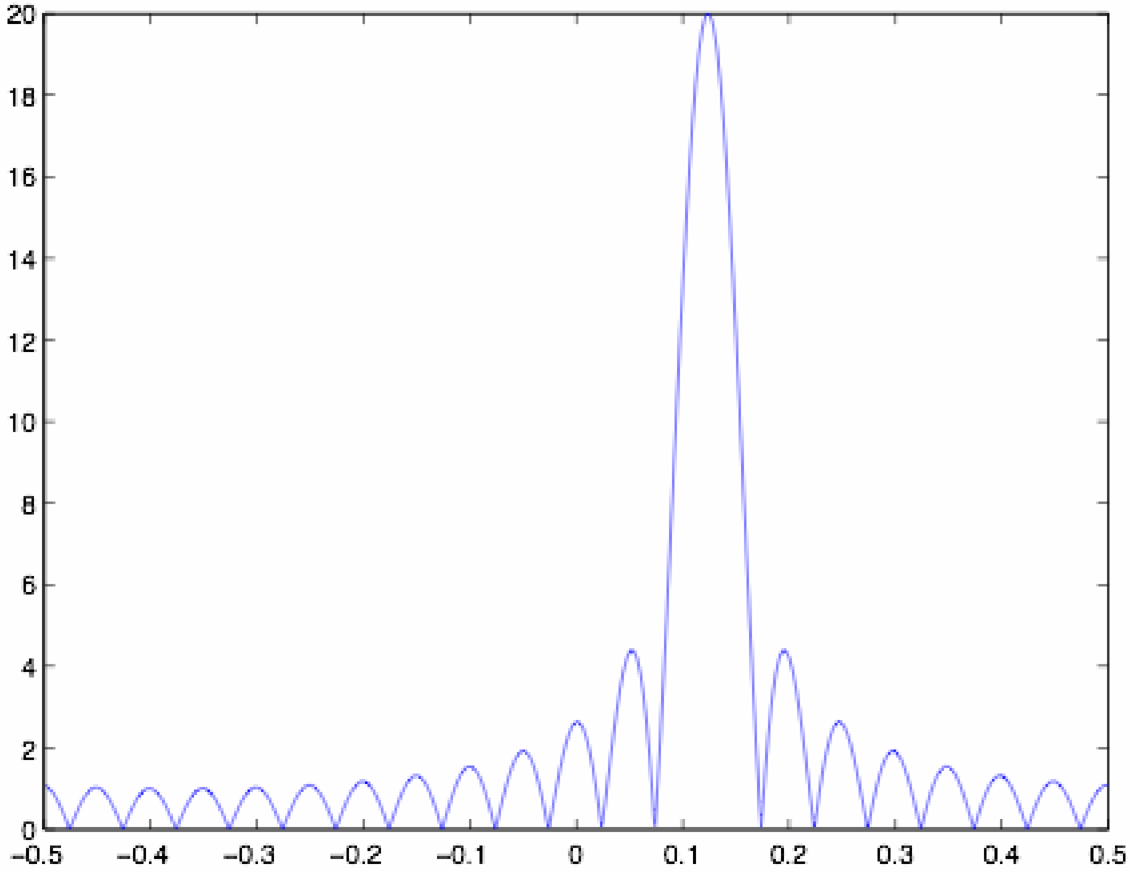
On trouve facilement que

$$|w(\nu)| = \frac{\sin \pi N \nu}{\sin \pi \nu}$$

Alors ν_0 est la position du pic de $\mathcal{F}(u^T)$



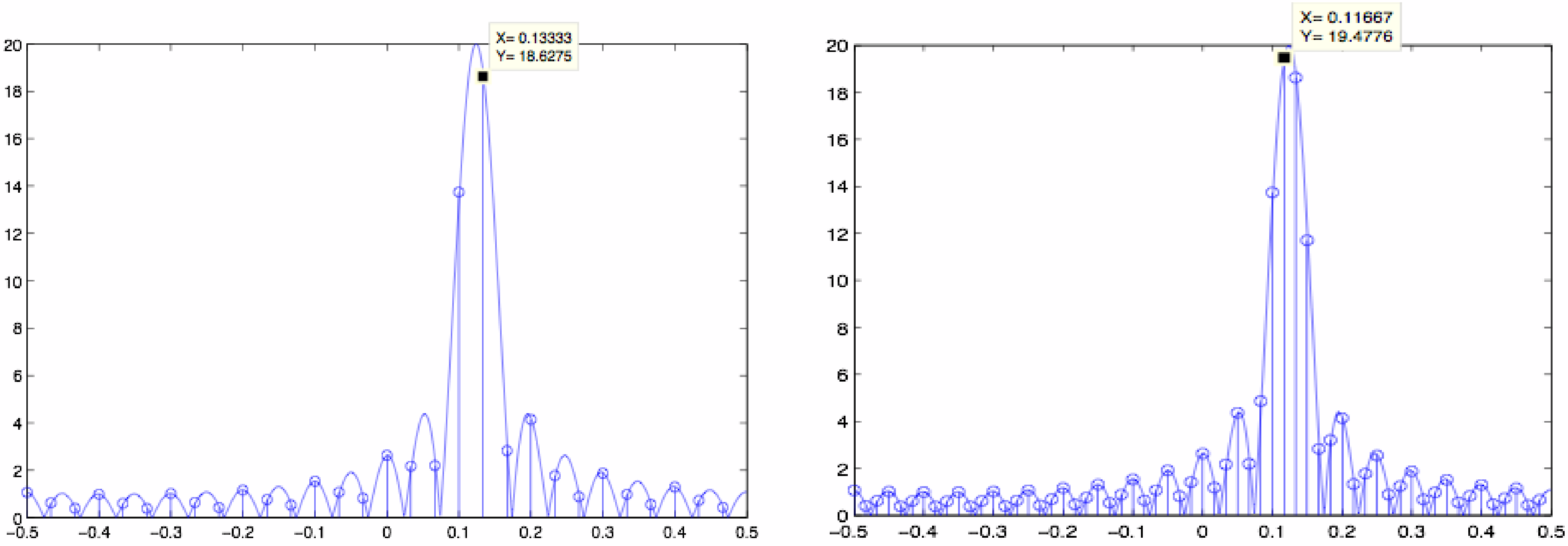
$|w(\nu)|$ pour N=20



TFtD d’une onde de fréquence 0,123 tronquée à 20 échantillons.

Détermination de la fréquence d’une onde

- Problème : on n’a pas $\widehat{u^T}$, mais seulement ses échantillons de pas $1/M$
- La position du pic sera donc connue avec une précision liée à l’ordre de la TFD (et non à la durée d’observation !)



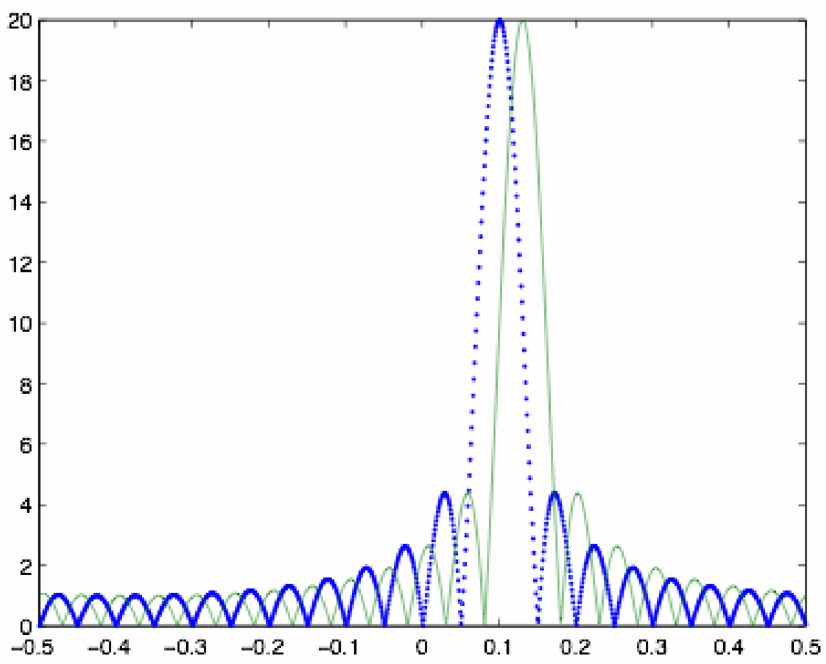
TFD d’ordre 30 (gauche) et 60 (droite). La précision de la détermination de la fréquence est en 1/M. (on choisit le k pour lequel la TFD est maximale)

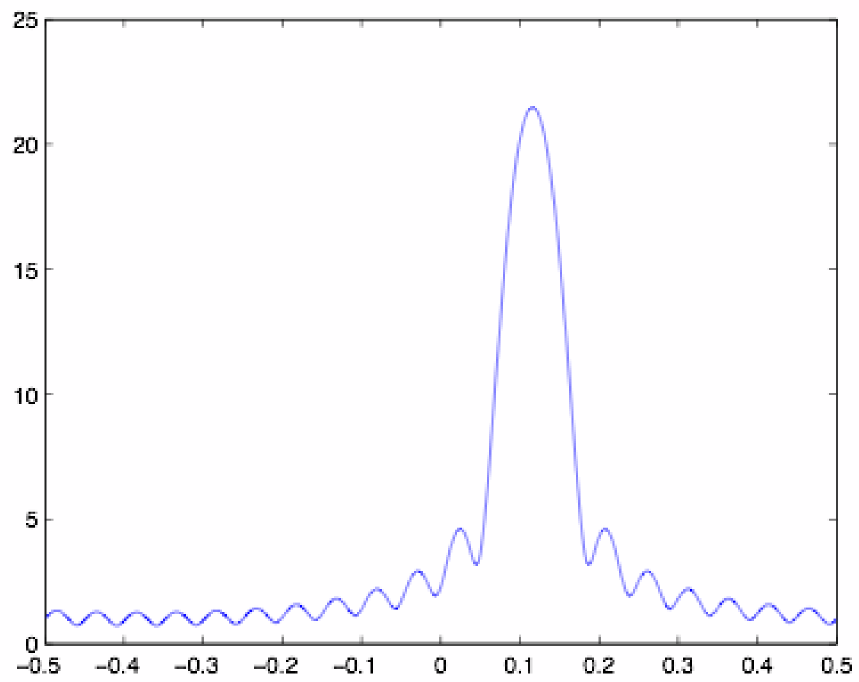
Séparation de deux ondes

- La durée de l'observation affecte la résolution en fréquence
- On considère un mélange deux ondes de Fourier, observé sur un nombre N d'échantillons:

$$u_n = A_0 e^{2i\pi\nu_0 n} + A_1 e^{2i\pi\nu_1 n}$$

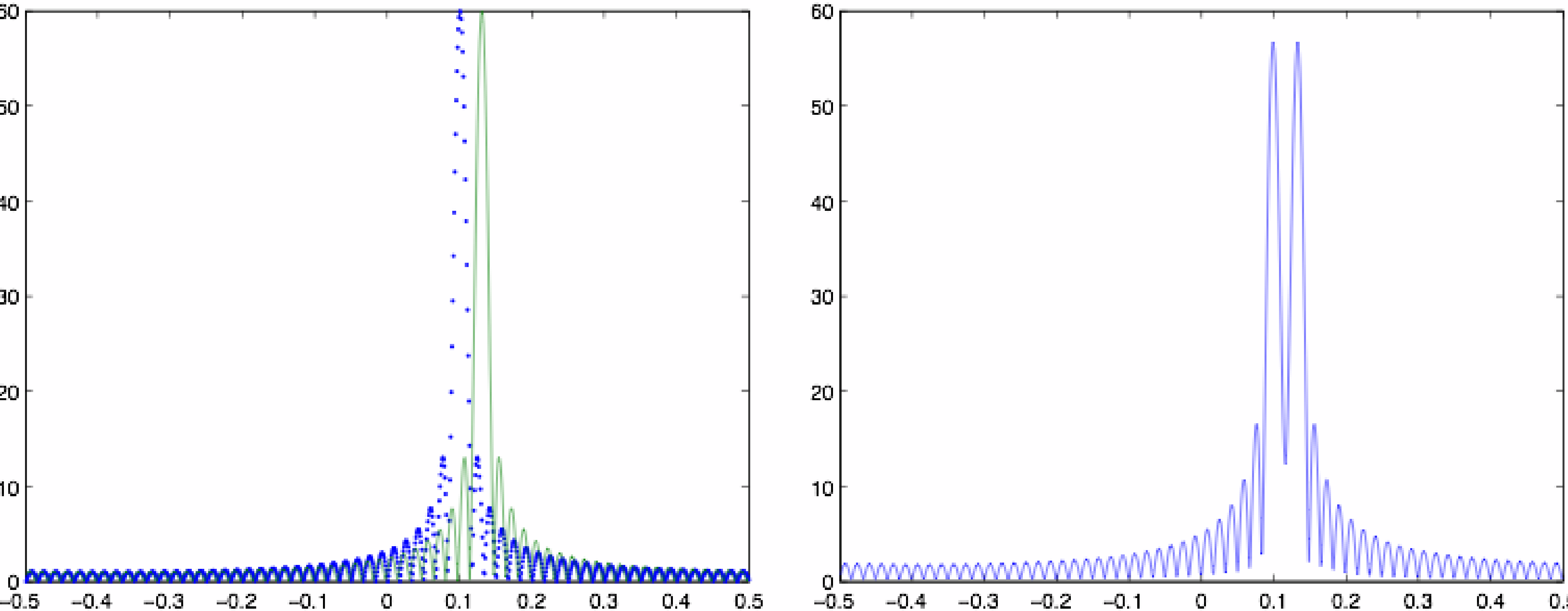
Résolution fréquentielle:





N=30. Gauche: Les deux TFtD, à droite la somme. On ne peut pas distinguer les ondes de fréquences proches à moins de 1/N (ordre de grandeur)

Résolution fréquentielle:



N=60. On arrive maintenant à distinguer les deux ondes.

Résolution fréquentielle:

- La TFD du mélange de 2 ondes est :

$$A_0 w\left(\frac{k}{M} - \nu_0\right) + A_1 w\left(\frac{k}{M} - \nu_1\right)$$

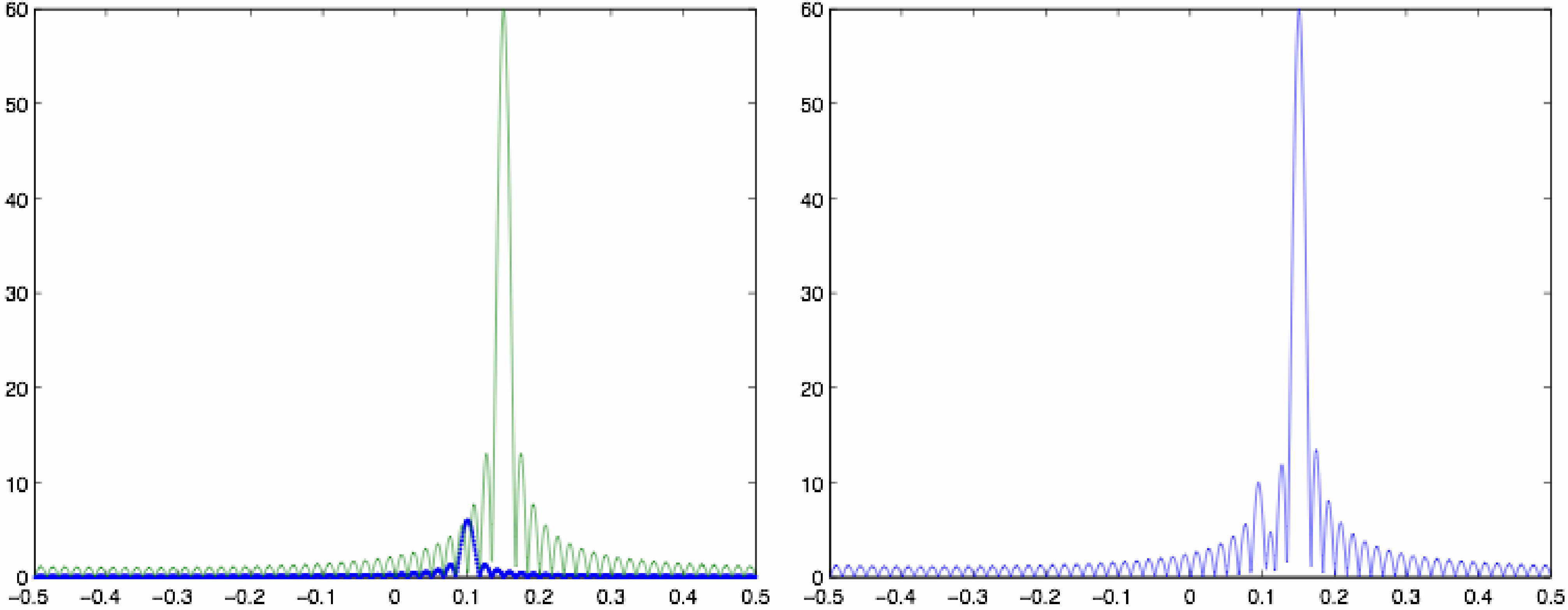
Si le 2 ondes sont de la même amplitude, les pics sont séparables si leurs lobes sont sepárés d’une demi-amplitude

L’amplitude du lobe depend de la fenêtre : pour le créneaux est $\frac{1}{N}$

Alors la condition est: $N \geq \frac{1}{|\nu_0 - \nu_1|}$

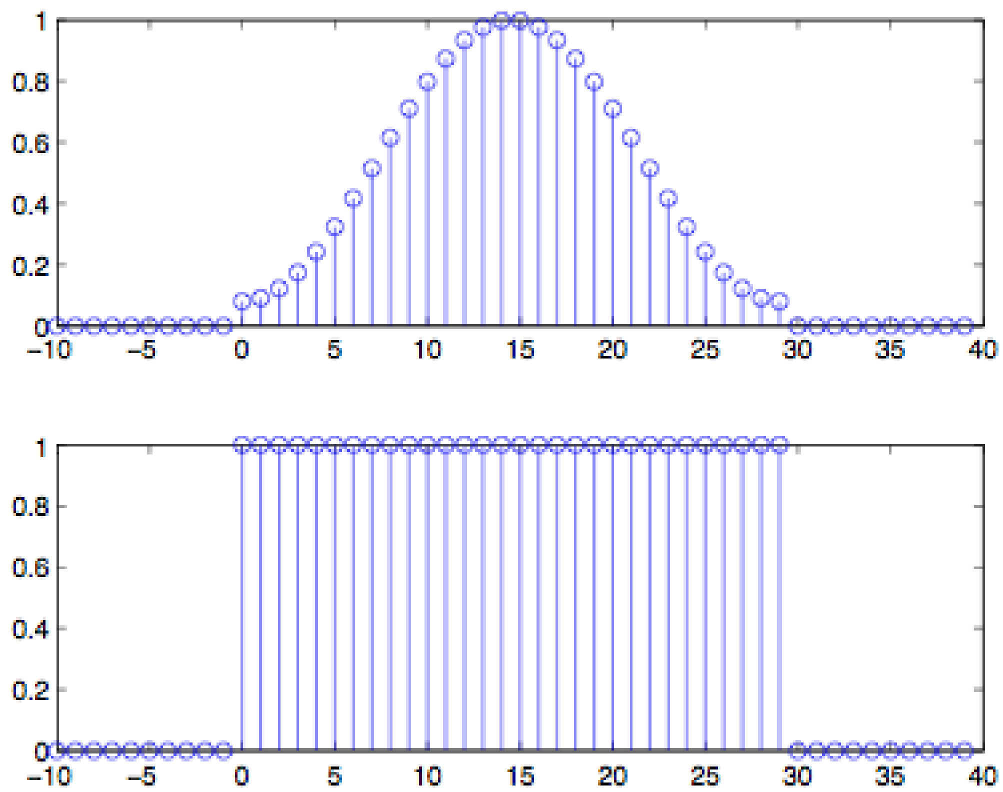
Problème des amplitudes très différentes, masquage et fenêtrage

- Pour remédier au problème de la résolution fréquentielle, il faut augmenter le nombre d'échantillons observés N, si possible.
- Ce ne dépende pas de l'ordre M de la TFD
- Que se passe-t-il si les deux ondes ont des amplitudes très différentes?



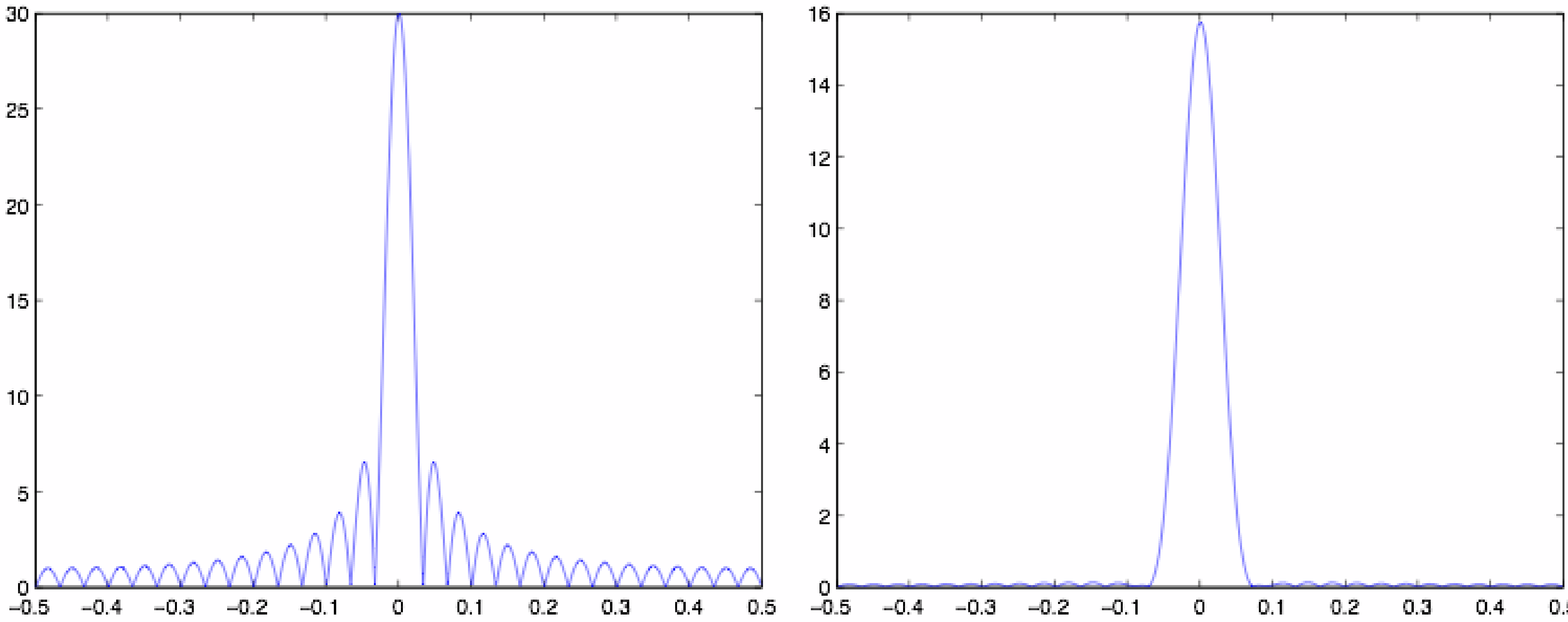
Gauche: TFtD des deux ondes.
Droite: TFtD de la somme.
Les pics sécondaires masquent la 2ème onde

Le choix d'une fenêtre:

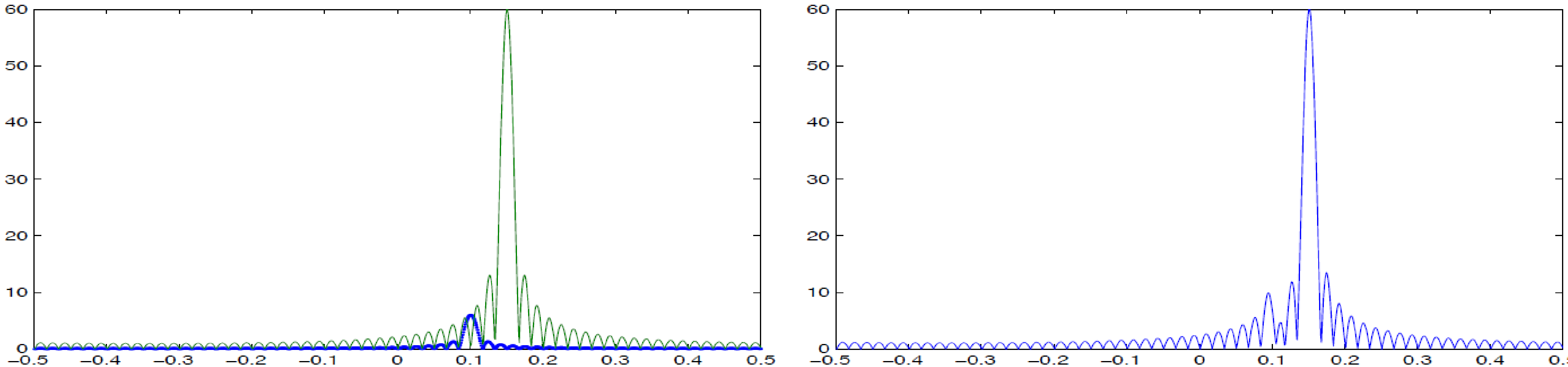


Haut: Fenêtre de Hamming. Bas: fenêtre créneau (taille 30 dans les deux cas).

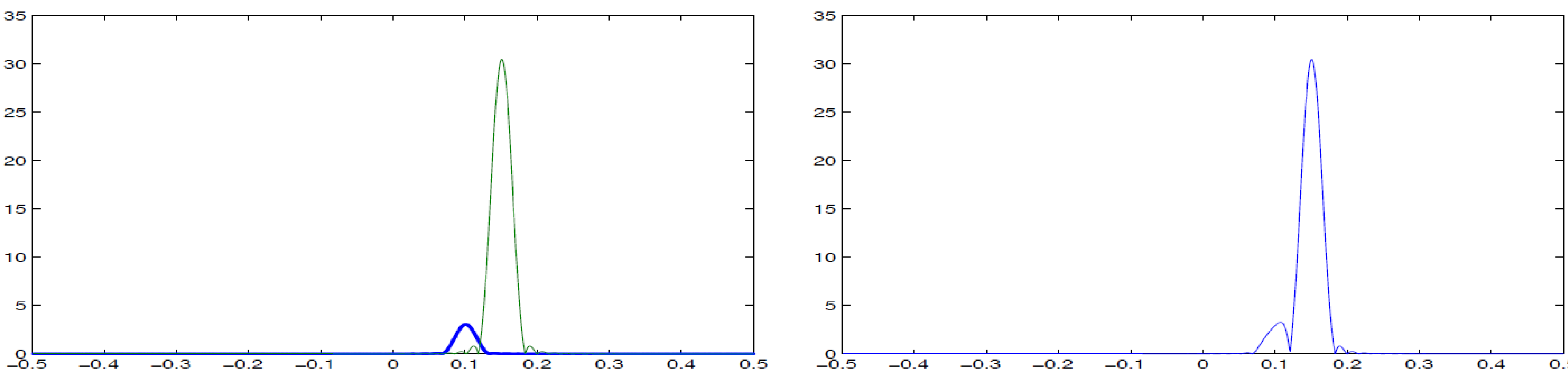
Le choix d'une fenêtre:



Gauche : TFtD d'un créneau de taille 30.
Droite : TFtD d'une fenêtre de Hamming.



Troncature brutale (multiplication par un créneau)



Multiplication par la fenêtre de Hamming

Le spectrogramme

- L'idée du spectrogramme est d'analyser localement le contenu fréquentiel d'un signal.
- Autour de chaque point du signal, on extrait une fenêtre dont on calcul la TFtD (par une TFD)
- Pour un signal u et une fenêtre w:

$$\forall (n,\nu) \in \mathbb{Z} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,\ U(n,\nu) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu m}$$

Le spectrogramme

- Pour n fixé on a la formule

$$\forall \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \; U(n,\nu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu m}$$

- Elle signifie que $U(n,\nu)$ est la TFtD de u multipliée par la fenêtre w translatée de n.

Le spectrogramme

- Pour une fréquence fixe on a la formule

$$U(n,\nu_0) = \sum_m u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu_0(n-m)} e^{-2i\pi\nu n}$$

$$|U(n,\nu_0)| = \sum_m u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu_0(n-m)} =$$

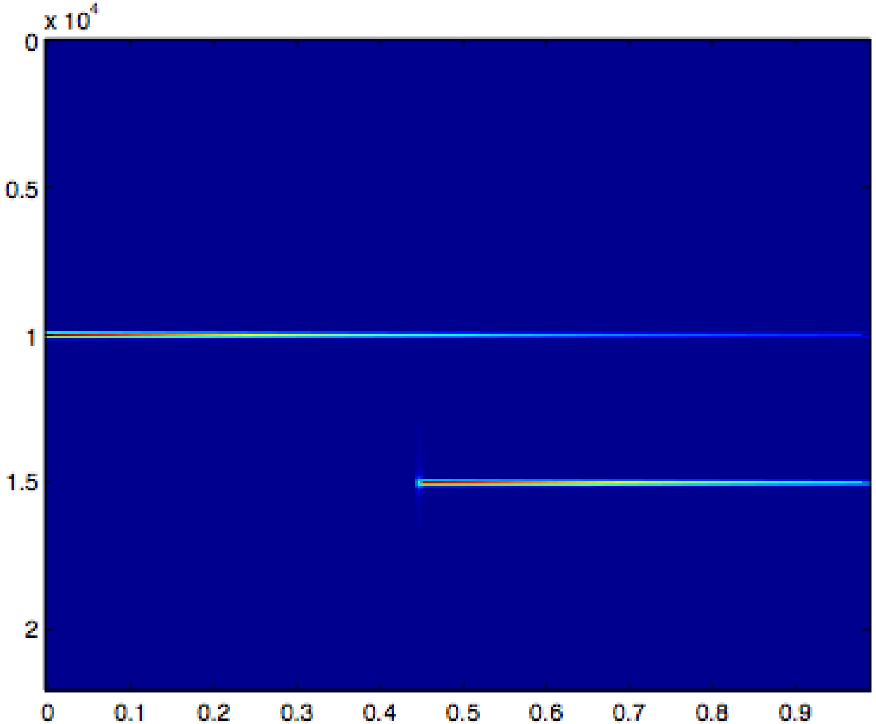
$$< u, w\phi^{\nu_0} >_n$$

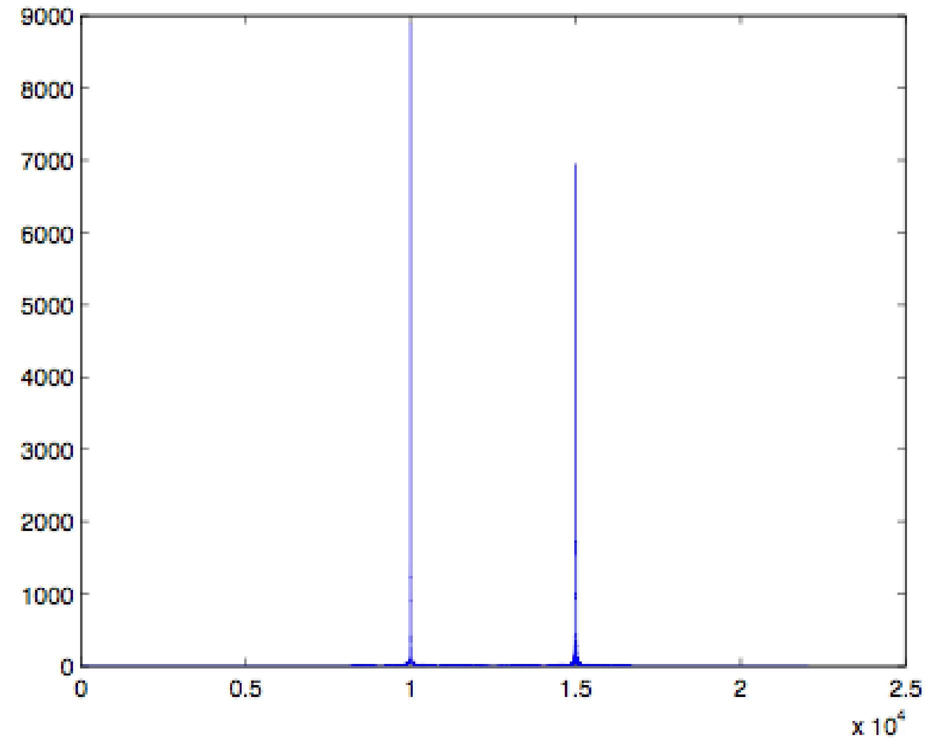
Produit scalaire entre u et w centrée à la fréquence ν_0

Affichage des spectrogrammes

- Comme on a affaire à des signaux réels, le module de la TFtD est symétrique.
- L’axe du temps est l’axe des x et l’axe des y est l’axe des fréquences (ici en Hz)
- On utilise une échelle logarithmique pour le module, sinon, certaines fréquences domineraient trop. (c’est d’ailleurs l’échelle de sensibilité de l’oreille)

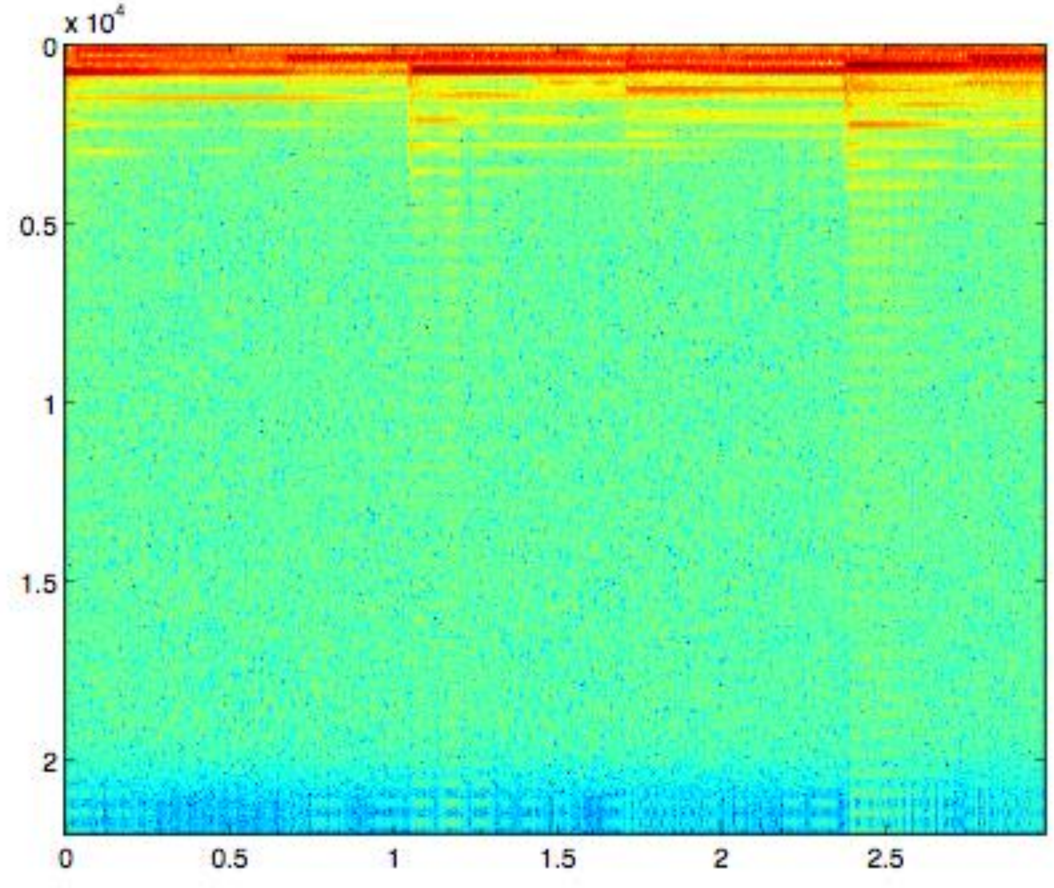
Exemple:





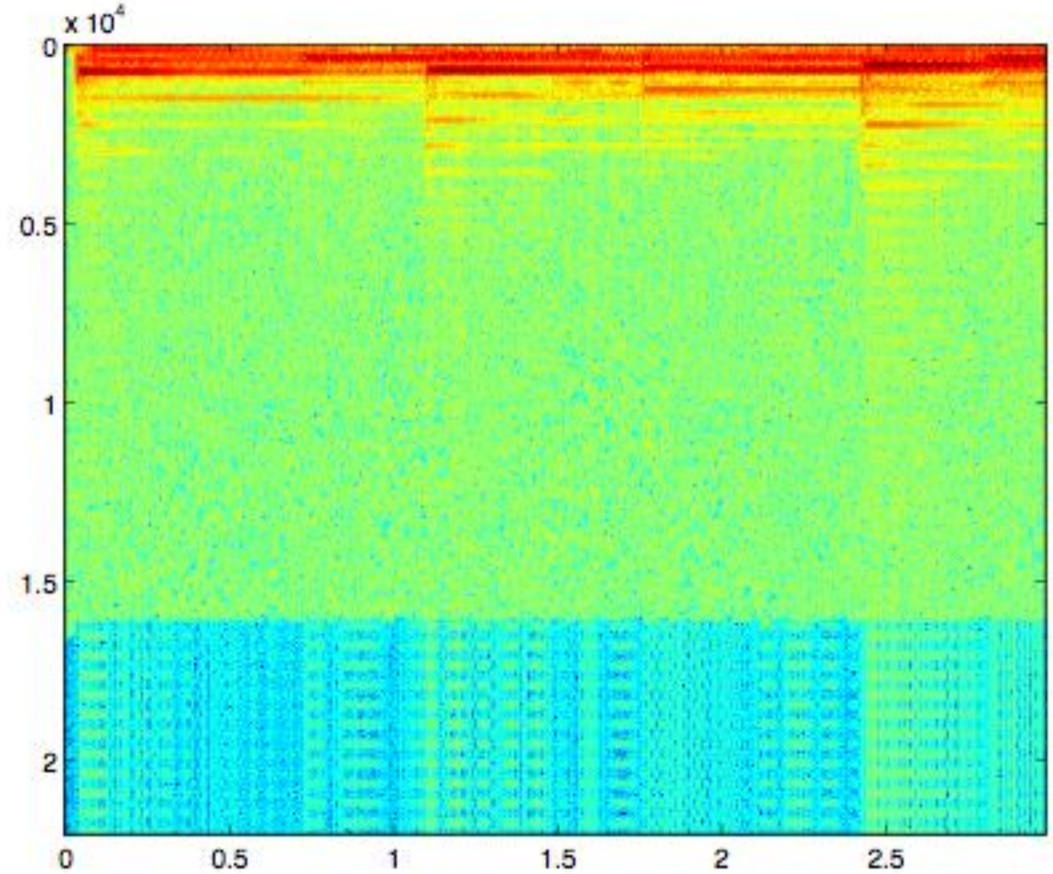
Gauche: Spectrogramme. TFtD du même signal.
La TFtD ne permet pas de savoir à quel moment arrive l'onde à 15000Hz.

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme:



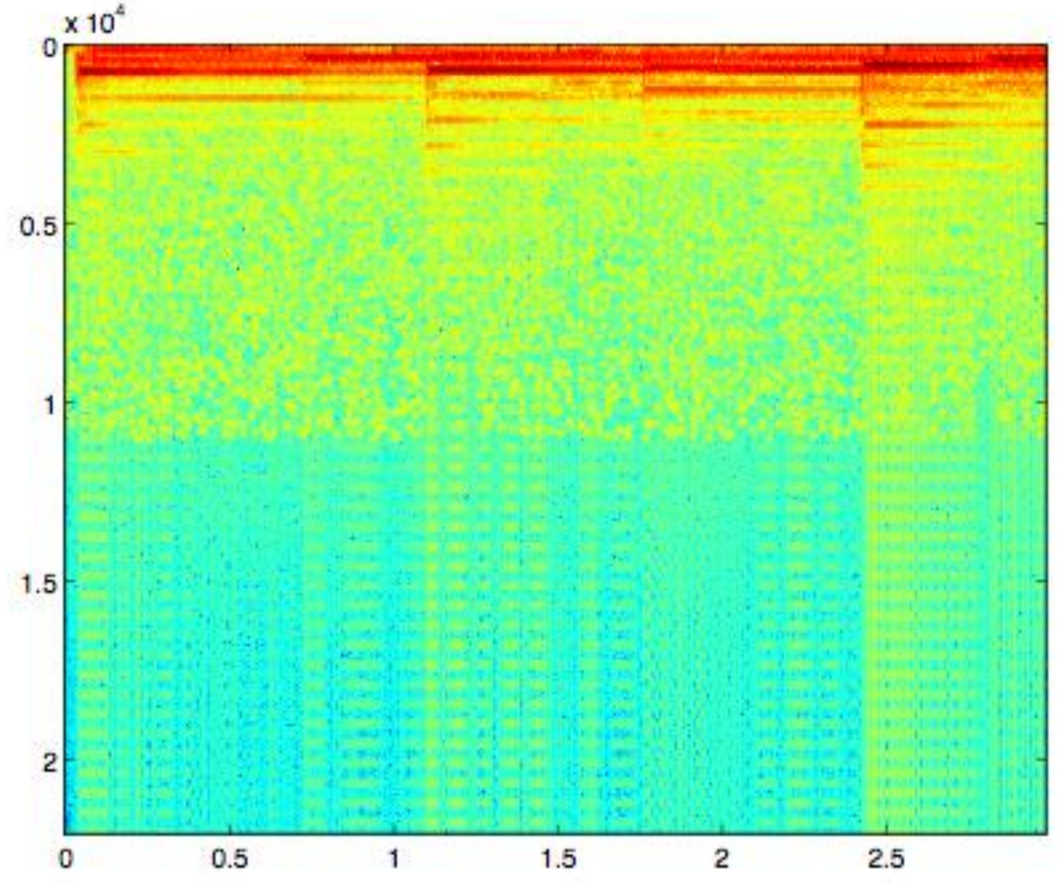
Piano: Original

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme:



MP3: 128kbits/s

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme:



MP3: 64kbits/s. Tout a diparu au-delà de 10000Hz. Cependant le codage MP3 n’est pas un simple passe bas.