Transformée en Z

ladjal, bianchi, roueff, almansa@enst.fr

Vocabulaire

- RI pour réponse impulsionnelle
- Suite causale: h_n nul pour $n < 0$
- SLI causal si sa RI l'est
- Suite anti-causale: h_n nul pour $n \geq 0$
- SLI anti-causal si sa RI l'est
- Bilatère: ni causal ni anti-causal
- RIF: RI finie (support fini)
- RII: RI à support infini

Propriétés de la causalité

- Un SLI causal ne dépend que du passé de son entrée.
- La convolution de deux suites causales est causale.
- Et donc, la composition de deux SLI causaux est un SLI causal

$(u * v)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m v_{n-m} = \sum_{m \geq 0} u_m v_{n-m}$, nul si $n < 0$

- Tout système physique réaliste est causal.

Transformée en Z (TZ)

Si $h \in l^1$, on définit sa TZ (notée $H(z)$) par:

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \mathcal{Z}[h](z) = H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n}$$

Avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ (Cercle unité)

On observe que $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \hat{h}(\nu) = H(z)|_{z=e^{2i\pi\nu}}$

Ou encore $\forall z \in \mathbb{U}, H(z) = \hat{h}\left(\frac{\ln z}{2i\pi}\right)$

Propriétés de la TZ

Grâce à la relation entre TZ et TFtD, on trouve facilement les propriétés de la TZ

Convolution : Si $u, h \in l^1$, on sait que $v = u * h \in l^1$ et on a:

$$V(z) = U(z)H(z)$$

Inversion : Si $u \in l^1$ et $U(z)$ est sa TZ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = \int_{-1/2}^{1/2} H\left(e^{2i\pi\nu}\right) e^{2i\pi\nu} \mathrm{d}\nu$$

En conséquence, la TZ est injective

Propriétés de la TZ

$$\forall u, v \in l^1, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

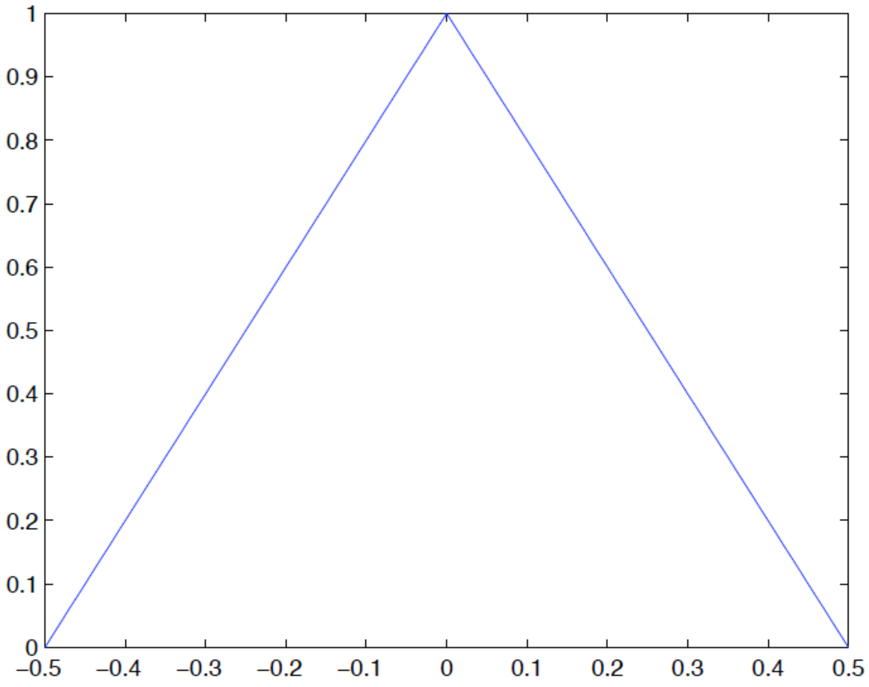
Retard :

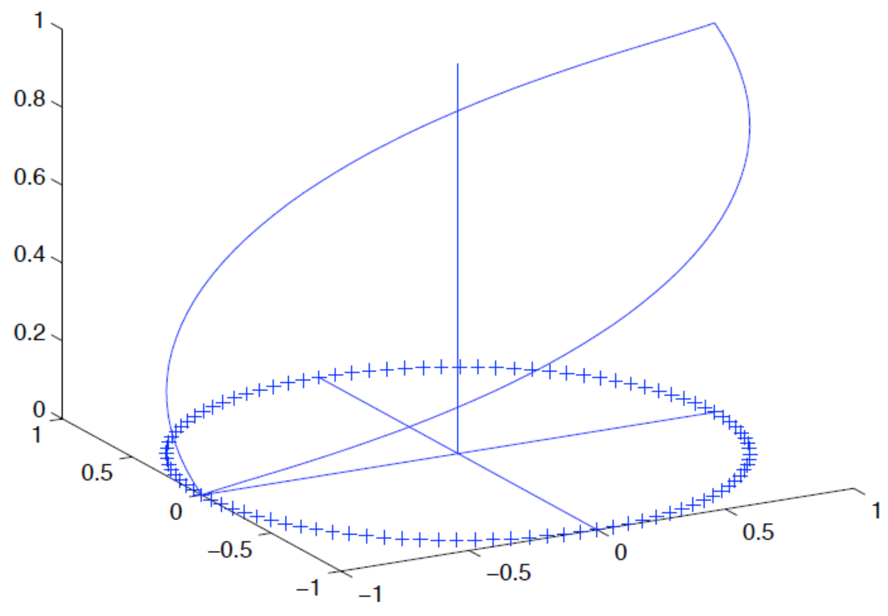
$\forall z \in \mathbb{U},$

$$\mathcal{Z}[u^m](z) = \sum_{n \in Z} u_{n-m} z^{-n} = \sum_{k \in Z} u_k z^{-k-m} = z^{-m} U(z)$$

Linéarité :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \mathcal{Z}[\lambda_1 u + \lambda_2 v](z) = \lambda_1 U(z) + \lambda_2 V(z)$$





TFtD et TZ d'une même suite. On a une illustration graphique du caractère périodique des fréquences sur Z ([-1/2,1/2[)

Exemples de TZ

- Si $h_n \neq 0 \Leftrightarrow n \in \{0,1,\dots,N\}$, alors sa TZ est un polynôme en z^{-1}:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n} = P(z^{-1})$$

- $h_0 = 1, h_1 = -\frac{1}{2}, h_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}$$

- $h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si $n \geq 0$, et $h_n = 0$ ailleurs

Trouver $H(z)$

Exemples de TZ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

- Remarquer que les deux dernières suites sont les RI de SLI inverses l'un de l'autre...

Les filtres stables récursifs

- Un filtre numérique est un SLI sur Z
- Un SLI est stable si $h \in l^1$ (Stabilité BIBO – *Bounded input, bounded output*)
- Un filtre (SLI) stable est **récursif** si

1. la relation entrée/sortie peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad & b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ \ldots + b_q y_{n-q} \\ = \quad & a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ \ldots + a_p x_{n-p} \end{aligned}$$

2. Les polynômes $P(z) = \sum_i a_i z^i$ et $Q(z) = \sum_i b_i z^i$ sont co-premiers

Les filtres stables récursifs

- Permettent d'implémenter une classe de filtres plus large des RIF *avec un nombre fini d'opérations*
- Exactement si l'entrée est causale
  - Mais tout signal acquis est causale, quitte à le retarder
- Avec précision arbitraire sinon

TZ de la RI d’un filtre récursif stable

- Si H est la TZ de la RI d’un filtre récursif stable alors (avec les notations précédentes)

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Ceci implique que le polynôme Q ne s’annule pas sur le cercle unité.

Décroissance exponentielle de la décomposition d'une fraction rationnelle

Si P et Q sont deux polynômes co-premiers et Q ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$, alors il existe une suite h et des réels positifs R_1, R_2, C_1, C_2 tels que:

$$0 < R_1 < 1 < R_2$$

$$\forall n \geq 0, \qquad |h_n| < C_1 R_1^n, \text{et } |h_{-n}| < C_2 R_2^{-n}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: R_1 < |z| < R_2, \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}$$

En plus, $h \in l^1$ et $\forall z \in \mathbb{U}, H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$

Sans démonstration

Deux décompositions importantes

Soit $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$: $|\alpha| < 1$, alors

$$\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^{-n}$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$: $|\alpha| > 1$, alors

$\forall z \in \mathbb{U}$,

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{-\alpha^{-1} z}{1-\alpha^{-1} z} = -\sum_{n>0} \alpha^{-n} z^n = -\sum_{m<0} \alpha^m z^{-m}$$

Si α est à l'intérieur [extérieur] du disque unitaire, $H(z)$ est la TZ d'une suite [anti-]causale

Une équation de récurrence n'a qu'une seule solution sommable

- Si on se donne une équation de récurrence telle que Q n'a pas de zéros sur le cercle unité. Alors pour toute entrée sommable x, il existe une unique solution $y \in l^1$ tel que $y = x * h$, où h est la seule suite dont la TZ est P/Q.
- Ainsi, une équation de récurrence définit un SLI (avec la condition sur Q).

Une équation de récurrence n'a qu'une seule solution sommable

Unicité. Soit y^1 et y^2 deux solutions associées à x :

$$\sum b_m (y^1)^m = \sum a_k x^k = \sum b_m (y^2)^m$$

$$\sum b_m z^{-m} Y^1(z) = Q(z^{-1}) Y^1(z) = \sum b_m z^{-m} Y^2(z)$$

$$= Q(z^{-1}) Y^2(z) \Rightarrow Y^1(z) = Y^2(z)$$

L'injectivité assure le résultat $y^1 = y^2$

Forme Le théorème précédent assure que si on définit $H(z) = \frac{P\left(z^{-1}\right)}{Q\left(z^{-1}\right)}$, alors $\exists h \in l^1 : \mathcal{Z}[h](z) = H(Z)$

Soit donc $y = h * x$. On sait que $y \in l^1$, donc on en peut calculer la TZ

Une équation de récurrence n’a qu’une seule solution sommable

$$y = h * x \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} X(z)$$

$$Q(z^{-1})Y(z) = P(z^{-1})X(z)$$

$$\sum_m b_m z^{-m} Y(z) = \sum_k a_k z^{-k} X(z) \xrightarrow[\text{TZ}-\text{I}]{}$$

$$\sum_m b_m y_{n-m} = \sum_k a_k x_{n-k} \Rightarrow$$

y est une (la) solution

Simplification d'une équation de récurrence

- On se donne une équation de récurrence (non complètement triviale)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} \quad = \quad a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p}$$

- Quitte à décaler x et y, on peut toujours supposer que $b_0 = 1$ et a_0 non nul.
- On peut aussi remplacer a_i par a_i/a_0 et dire que le nouveau $a_0 = 1$: c'est équivalent à multiplier x par une constante
- Nous ferons ces hypothèses pour simplifier la présentation.

Pôles et zéros

- On se donne un SLI stable récursif d'équation de récurrence (a_0 et b_0 non nuls)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p}$$

- Les zéros sont les zéros de $P(z^{-1})$
- Les pôles sont les zéros de $Q(z^{-1})$

Rem: Ce sont les inverses des zéros de de P et Q.

Ce sont aussi les zéros et les pôles de $H(z)$

Interprétation du module de la TZ rationnelle

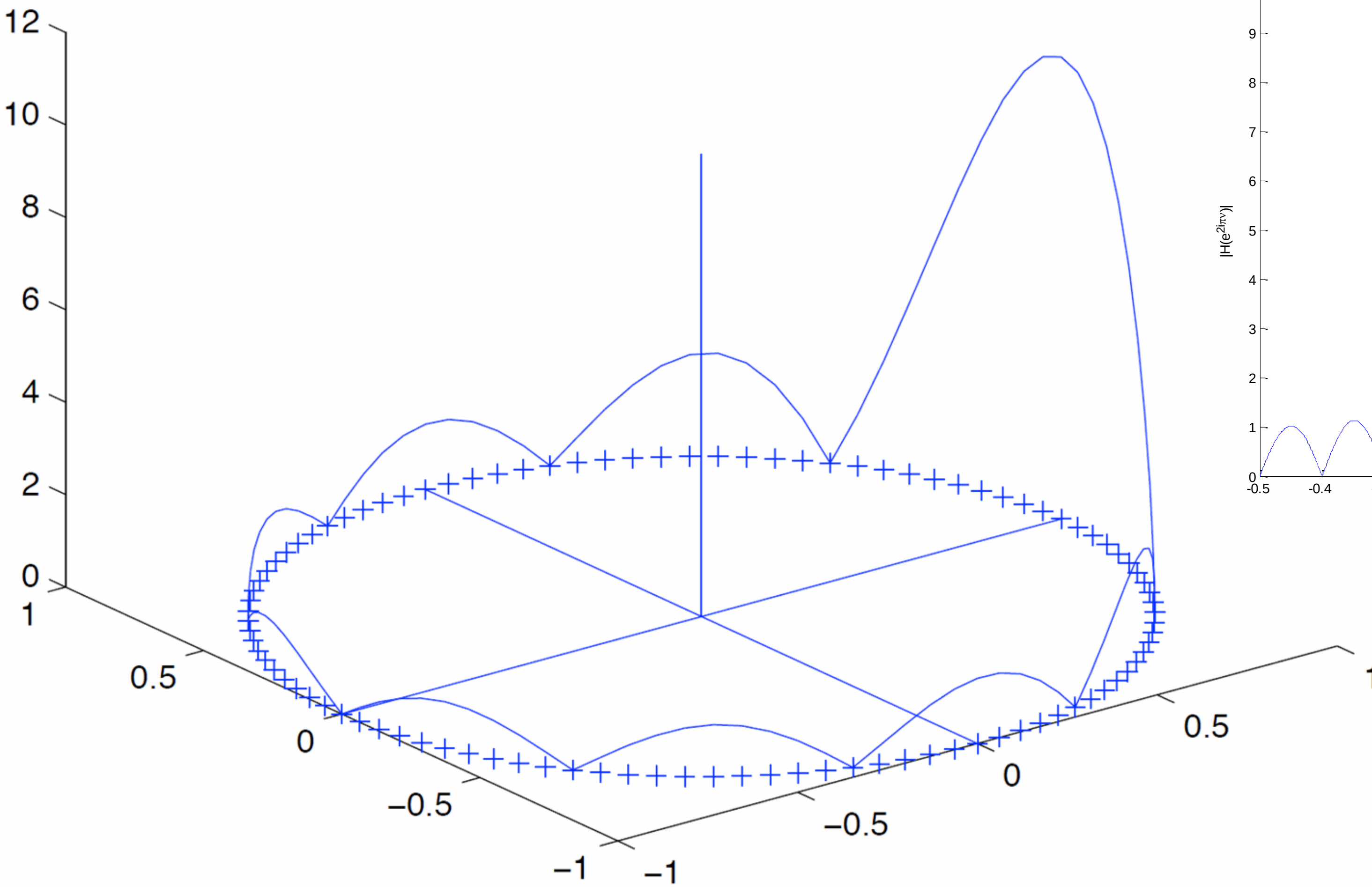
$$a_0 = 1, b_0 = 1, \qquad H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

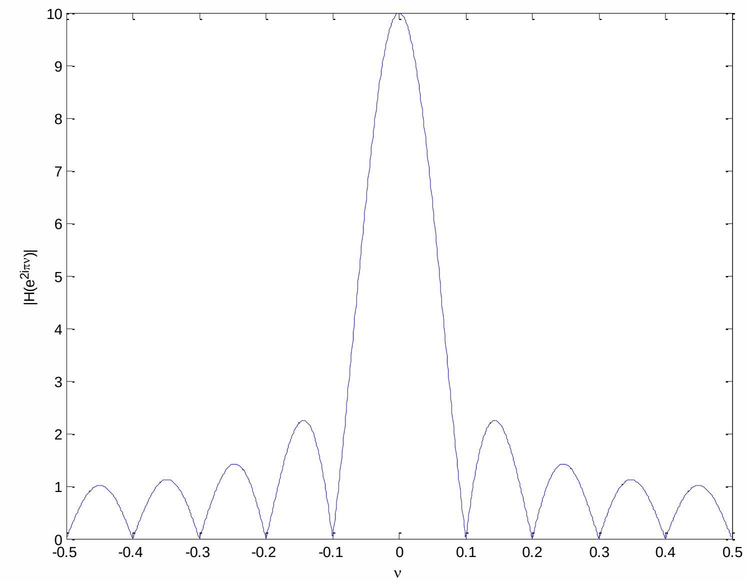
$$P(t) = \sum a_i t^i,\ \mathrm{Q}(t) = \sum b_i t^i$$

Alors $|H(z)| = \frac{\prod_i MA_i}{\prod_j MB_j}$

Où M est le point d'affixe z, et A_i, B_j sont les points d'affixes les zéros [pôles] du filtre

Exemple





Module de la TZ du filtre moyenneur (N=10 ici). Son module est nul dès que l'on croise une racine N-ième de l'unité sauf la racine 1.

Inversion d'un filtre récursif stable

- Si un filtre récursif stable a une équation de récurrence, telle que ni P ni Q ne s'annulent sur le cercle unité

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p}$$

- Alors son inverse est aussi récursif stable et a pour équation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_q y_{n-q} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p}$$

- Rem: Si P avait un zéro sur le cercle unité, le filtre ne serait pas inversible.

Causalité:

- Un filtre stable récursif (b_0 non nul) est causal si et seulement si tous ses pôles sont strictement à l'intérieur du disque unité.

- Un filtre à minimum de phase est un filtre qui est causal et d'inverse causal. C'est équivalent à dire que tous ses pôles et ses zéros sont strictement dans le disque unité. (voir TD, pour plus de propriétés des minimum de phase)

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Pour le SLI stable, récursif, causal d'équation:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad y_n + b_1 y_{n-1} + \ ... + b_q y_{n-q}$$
$$= \quad a_0\, x_n + a_1 x_{n-1} + \ ... + a_p x_{n-p}$$

L'algorithme suivant

$$x_n^c = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ x_n \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{t_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{p} a_m x_{n-m}^c - \sum_{k=1}^{q} a_k t_{n-k} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Implémente parfaitement le filtre si x est causale et aussi précisément que voulu à partir d'un certain rang sinon:
$\exists A < 1, C \geq 0 \colon \forall n \geq 0, |t_n - y_n| < C A^n \|x\|_1$

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Si x causale, $x^c = x$

$y = x * h$ doit aussi être causale, donc $\forall n < 0,\ y_n = t_n$

Pour $n \geq -1$, démonstration par récurrence

Base : $y_{-1} = t_{-1} = 0$

Induction : si $\forall k < n, y_k = t_k$ alors $y_n = t_n$

$$y_n = \sum_{m=0}^{p} a_m x_{n-m} - \sum_{m=1}^{q} b_m y_{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{p} a_m x^c_{n-m} - \sum_{m=1}^{q} b_m t_{n-m} = t_n$$

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Si x non-causale, on a toujours $y = x * h$

En plus, $t = h * x^c$ et t doit aussi être causale

Alors $y - t = h * (x - x^c)$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y_n - t_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (x_m - x_m^c) h_{n-m} = \sum_{m<0} x_m h_{n-m}$$

Pour $n > 0$,

$$|y_n - t_n| \leq \sum_{m<0} |x_m| \, |h_{n-m}| \leq \sum_{m<0} |\, x_m| \, CR^n = CR^n \|x\|_1$$

Exemple

- Pour inverser le filtre de réponse impulsionnelle $h_0 = 1$ et $h_1 = \frac{1}{2}$, il suffit de faire 2 opérations par échantillon au lieu d'une infinité si on utilisait la convolution.

Non causal?

Essayer d'implémenter de manière causale l'équation de récurrence:

$$y_n - 2y_{n-1} = x_n$$

Non causal?

Essayer d'implémenter de manière causale l'équation de récurrence:

$$y_n - 2y_{n-1} = x_n$$

$h_n = 2^n$ pour $n < 0$ (anticausal, stable)

Si on applique l'algorithme récursif, on a

$t_n = x_n + 2t_{n-1} = 2^n$ non stable !

Synthèse de filtre:
Méthode de la fenêtre

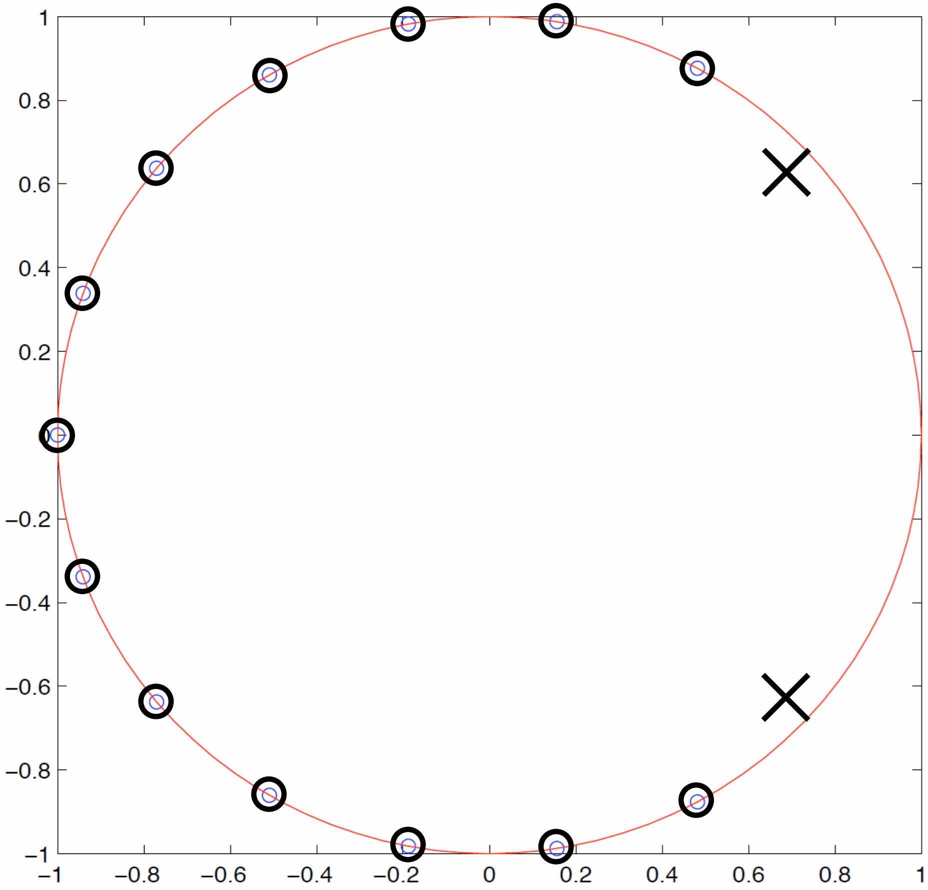
- h est une RI donnée. On veut l'approcher par une RIF g qui vérifie:
$$g_n = 0 \text{ si } |n| > N$$

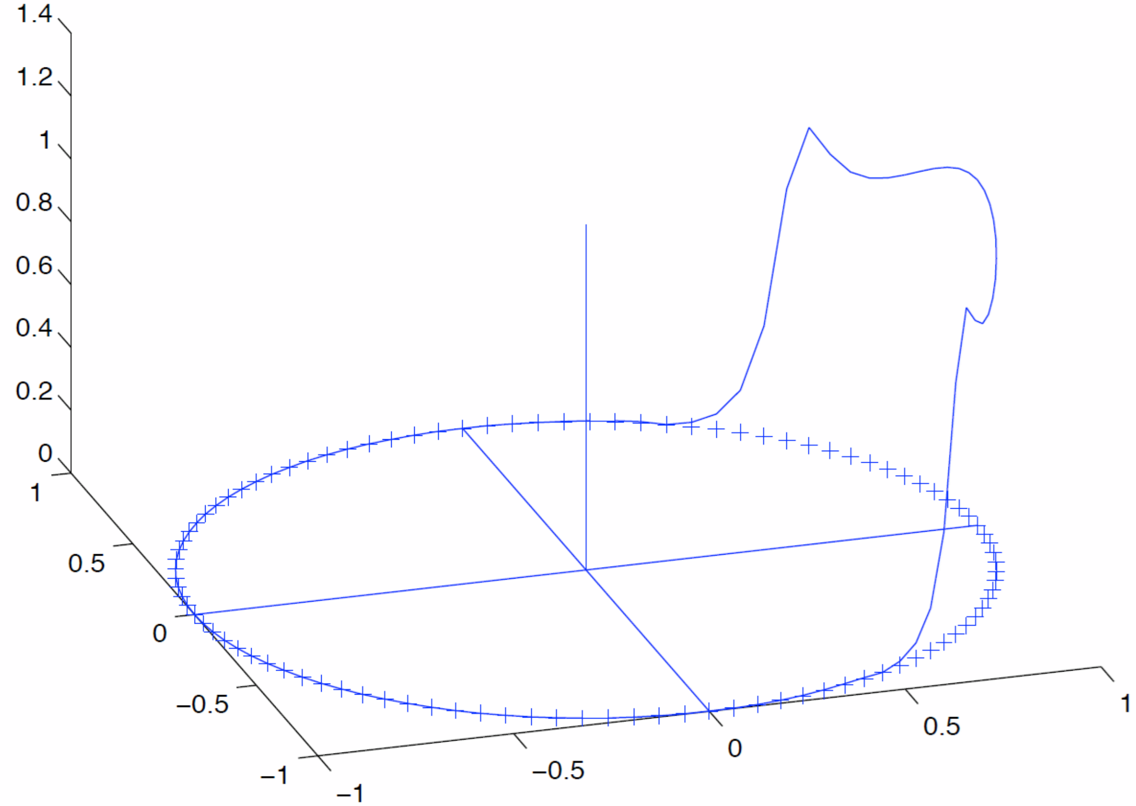
- Le critère a optimiser est: $\int_{-1/2}^{1/2} \left|\hat{h}(\nu) - \hat{g}(\nu)\right|^2 \mathrm{d}\nu = \left\|\hat{h} - \hat{g}\right\|_2^2 = \|h - g\|_2^2 =$
$$\sum_{|n| \leq N} |h_n - g_n|^2 + \sum_{|n| > N} |h_n|^2$$

- L'optimum est: $g_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n > N \\ h_n \text{ si } n \leq N \end{cases}$, d'où le nom…

- Si on veut approximer un FPB idéal avec fréq 1/8, $h_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)}{\pi n}$
EQ décroit comme $1/N$

Synthèse de filtre par choix de pôles et zéros d'un SLI stable récursif





On veut approximer un passe bas de fréquence 0.125. Avec le même nombre d'opérations que dans la méthode de la fenêtre, on obtient une approximation 3 fois meilleure, dans ce cas. (gauche, 2 pôles 'x' et 13 zéros 'o')