Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ et $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

cagnazzo@enst.fr

Espaces de fonctions

$L^1(\mathbb{R})$: fonctions sommables

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$$

$L^2(\mathbb{R})$: fonctions à énergie finie

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x < +\infty$$

$L^\infty(\mathbb{R})$: fonctions bornées

$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq C$ p.p.

Inclusions

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

Dém. $\int |f|^2 \leq \int \|f\|_\infty |f| = \|f\|_\infty \|f\|_1$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\exists A: f(x) = 0\ \forall |x| > A \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

Dém.

$$\int |f| = \int_{|f|>1} |f| + \int_{0<|f|\leq 1} |f| + \int_{|f|=0} |f|$$

$$\leq \int_{|f|>1} |f|^2 + \int_{0<|f|\leq 1} 1 \leq \|f\|_2^2 + 2A$$

Règles de calcul

$$L^k \cdot L^\infty \to L^k$$
$$L^2 \cdot L^2 \to L^1$$
$$L^k * L^1 \to L^k$$
$$L^2 * L^2 \to L^\infty$$

En plus, dans le dernier cas, la convolution est continue et tend vers 0 all'infini

Transformée de Fourier temps continu (TFtC): fonctions sommables

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa TFtC $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$:

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = [\mathcal{F}(f)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

Dans ce cas, $\hat{f}$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini.

Exemple: calculer la TFtC de $\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[}(x)$

Extension à $L^2(\mathbb{R})$

- Il existe une seule application linéaire entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ tel que:

1) Elle coïncide avec $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R})$
2) Satisfait l'égalité de Parseval: $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$
3) Est bijective

Extension à $L^2(\mathbb{R})$

- Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la formule $\int f(x)e^{-2i\pi\nu}\mathrm{d}x$ devrait s'interpréter dans les sens des distributions
- En pratique : si $f = \mathcal{F}(g) \in L^2$, la transformée de f est g symétrisée
- On peut considérer la suite de fonctions $f_N(x) = f(x)\mathbb{I}_{(-N,N)} \in L^1(\mathbb{R})$, et définir $\mathcal{F}(f)$ comme limite de $\mathcal{F}(f_N)$

Propriétés

Soient :

$f, g \in L^2(\mathbb{R}), \phi(x) = e^{2i\pi\nu_0 x}, f^y(x) = f(x - y)$

Si les règles de calcul le permettent, on a:

$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$

$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$

$\mathcal{F}(\phi f) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$

$\mathcal{F}(f^y)(\nu) = \hat{f}(\nu)e^{-2i\pi\nu y}$

Symétrie, symétrie hermitienne

$\mathcal{F}[f(\lambda x)](\nu) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

Théorème d'inversion

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ on définit transformée inverse de f la fonction

$$\bar{\mathcal{F}}[f](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2i\pi t\nu} \mathrm{d}t$$

Alors $\bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(f)] = f$

L'identité est ponctuelle pour $L^1(\mathbb{R})$ et en norme pour $L^2(\mathbb{R})$

Régularité et décroissance

$$\forall k \in \{0,1, \dots K\}, x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\hat{f} \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{f}^{(k)}(\nu) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^k f(x)]$$

$$\forall k \in \{0,1, \dots K\}, f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}),$$
$$f^{(k)}(x) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$$
$$\forall k \in \{0,1, \dots K\}, \lim_{|\nu| \to \infty} \nu^k \hat{f}(\nu) = 0$$
$$\text{et } \mathcal{F}\left[f^{(k)}\right](\nu) = (2i\pi x)^k \hat{f}(\nu)$$

TF en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

- On considère les fonctions en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
- On peut voir ces fonctions comme une période de fonctions périodiques
- On a $L^\infty\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \subset L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \subset L^1\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$

Coefficients de Fourier

Si $f \in L^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$, on appelle c.d.F. la suite c_k

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2i\pi kt} \mathrm{d}t$$

La suite c_k tend à zéro pour $k \to \pm\infty$

Propriétés

$f, g \in L^p\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$, c, d sont leurs c.d.F.

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi mt}\right) = \delta_{k-m}$$

$$\mathrm{p} = 1, \qquad \mathcal{F}(f * g) = cd$$

$$p = 2, \qquad \mathcal{F}(fg) = c * d$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{2i\pi k_0 t}\right](k) = c(k - k_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t-y)](k) = c(k)e^{-2i\pi ky}$$

Symétrie, symétrie hermitienne

Parseval, Inversion

Si $f \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ et c_k sont ses c.d.F., alors $c_k \in l^2(\mathbb{Z})$ et

$$\|f\|_2 = \|c\|_2$$

$$f \in L^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \Rightarrow \forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi tk} = f(t)$$

$f \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \Rightarrow \forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi tk}$ tend à $f(t)$ en norme quadratique

Régularité et décroissance

Si $f \in L^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \cap \mathcal{C}^{(N)}$,

Alors $\lim_{|k| \to \infty} k^N c_k = 0$ et les c.d.F. de sa dérivée d'ordre m sont $(2i\pi k)^m c_k$

Renormalisation du temps

Les c.d.F. d'une fonction définie sur $\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$ sont

$$c_k = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2} f(t)e^{-\frac{2i\pi t}{A}}\mathrm{d}t$$

Ils ont les mêmes propriétés que dans le cas $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, sauf Parseval:

$$\|f\|_2 = \sqrt{A}\|c\|_2$$