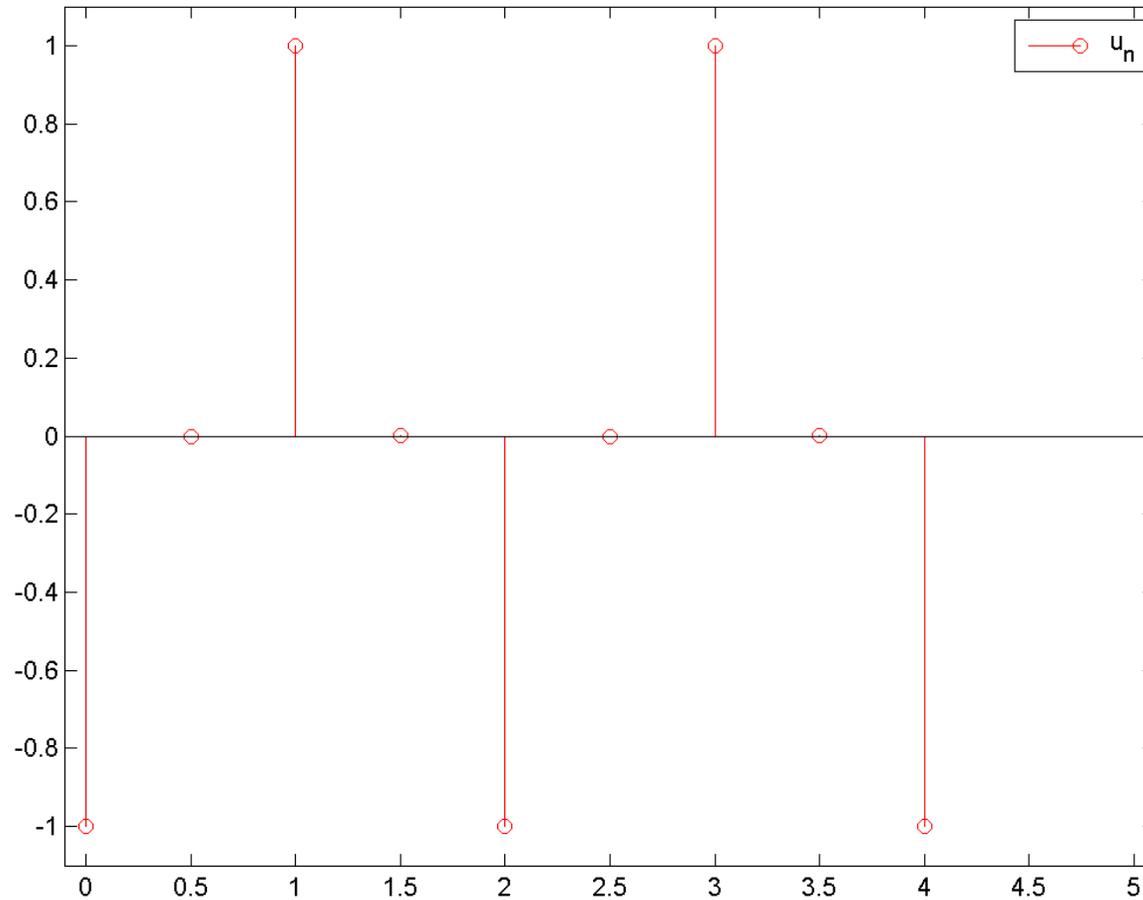
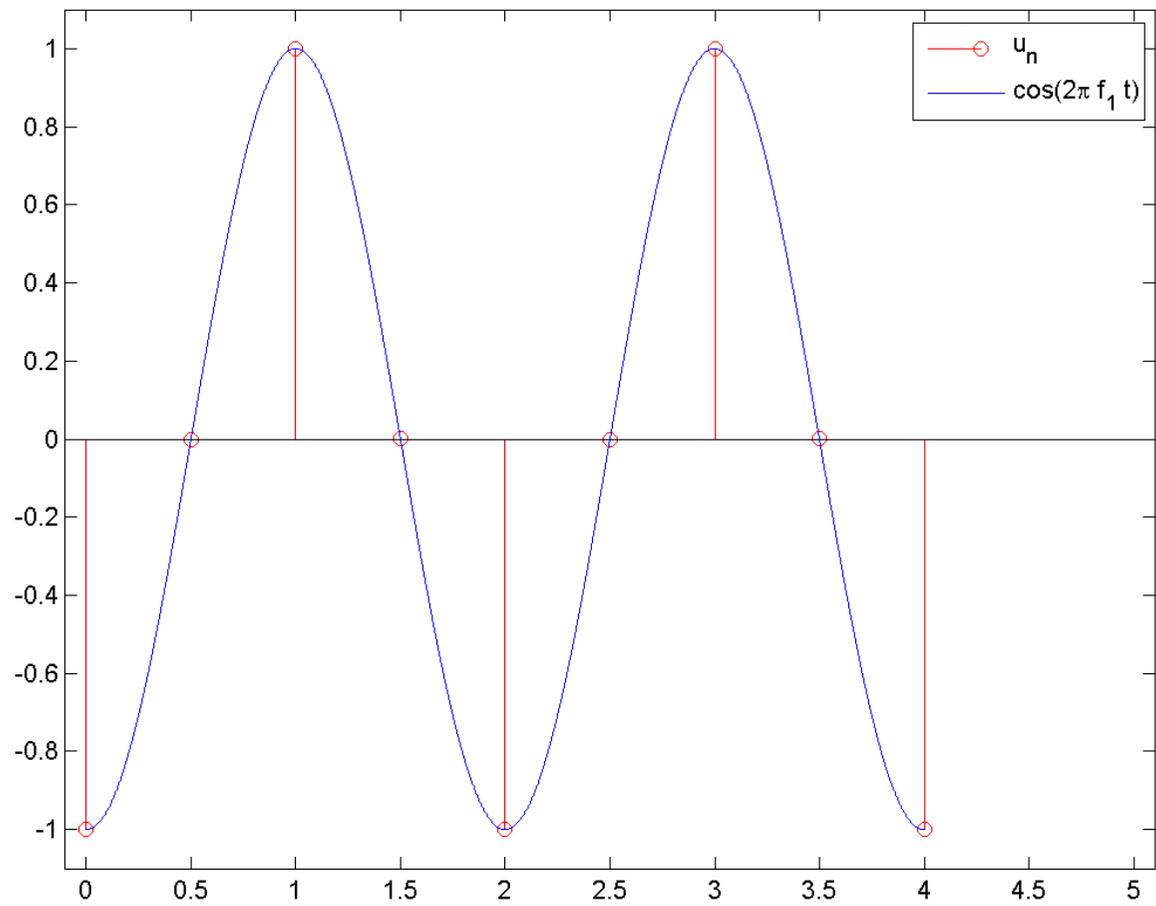


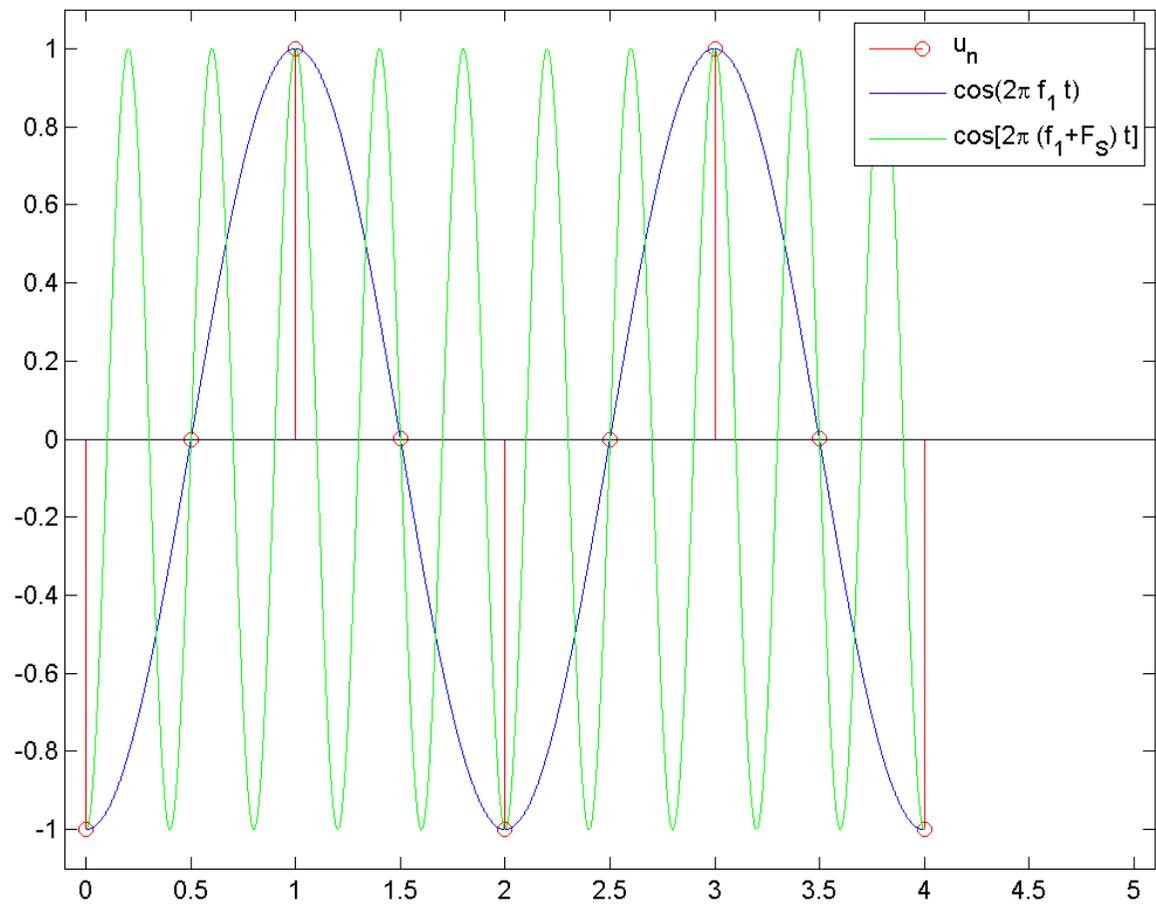
Échantillonnage

cagnazzo@enst.fr

Exemple : échantillonnage d'une onde







Formule de Poisson

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}), f(n) \in l^1, \hat{f}(m) \in l^1 \Rightarrow$$

$$\forall v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{-2i\pi m v} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n + v)$$

On pose $g(v) = \sum \hat{f}(n + v)$ on calcule les cdF de g :
on trouve $c_m = f(-m)$. On applique le théorème
d'inversion aux cdF et on conclue

Théorème de Shannon

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall \nu \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \hat{f}(\nu) = 0 \text{ et } f(n) \in l^1$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$$

Et

$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{-2i\pi\nu m} = \hat{f}(\nu)$$

Dém. \hat{f} bornée et à support borné, donc $\hat{f} \in L^1$

On applique Poisson: $\sum_m f(m) e^{-2i\pi\nu m} = \sum_n \hat{f}(n + \nu) = \hat{f}(\nu)$

On applique le théorème d'inversion à \hat{f} et on conclue

Théorème de Shannon sur L^2

$f \in L^2(\mathbb{R})$ et \hat{f} a support en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\forall n \in \mathbb{Z} f(n) = u_n \Rightarrow \|f\|_2 = \|u\|_2$$

Dém. On on pose la même fonction $g(v)$ qu'on a dans

Poisson: $\forall v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], g(v) = \sum_n \hat{f}(n + v) = \hat{f}(v)$

Par Poisson, les cdF de g sont $u_m = f(-m)$ et par

Parseval

$$\|u\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |g|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|f\|_2^2$$

Théorème de Shannon sur L^2

Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, les spectres sont à support fini $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, g(n) = f(n)$

Alors $f = g$ en norme quadratique, c'est-à-dire,

$$\|f - g\|_2 = 0$$

Dém. $h = f - g$ respecte les hypothèse du théorème précédent, donc

$$\|f - g\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \|u\|_2^2 = \sum_n [f(n) - g(n)]^2 = 0$$

Théorème de Shannon sur L^2

Maintenant, soit $f_N = f - \sum_{n=-N}^N f(n) \operatorname{sinc}_n^\pi$

Avec $\operatorname{sinc}_n^\pi(t) = \operatorname{sinc}[\pi(t - n)]$

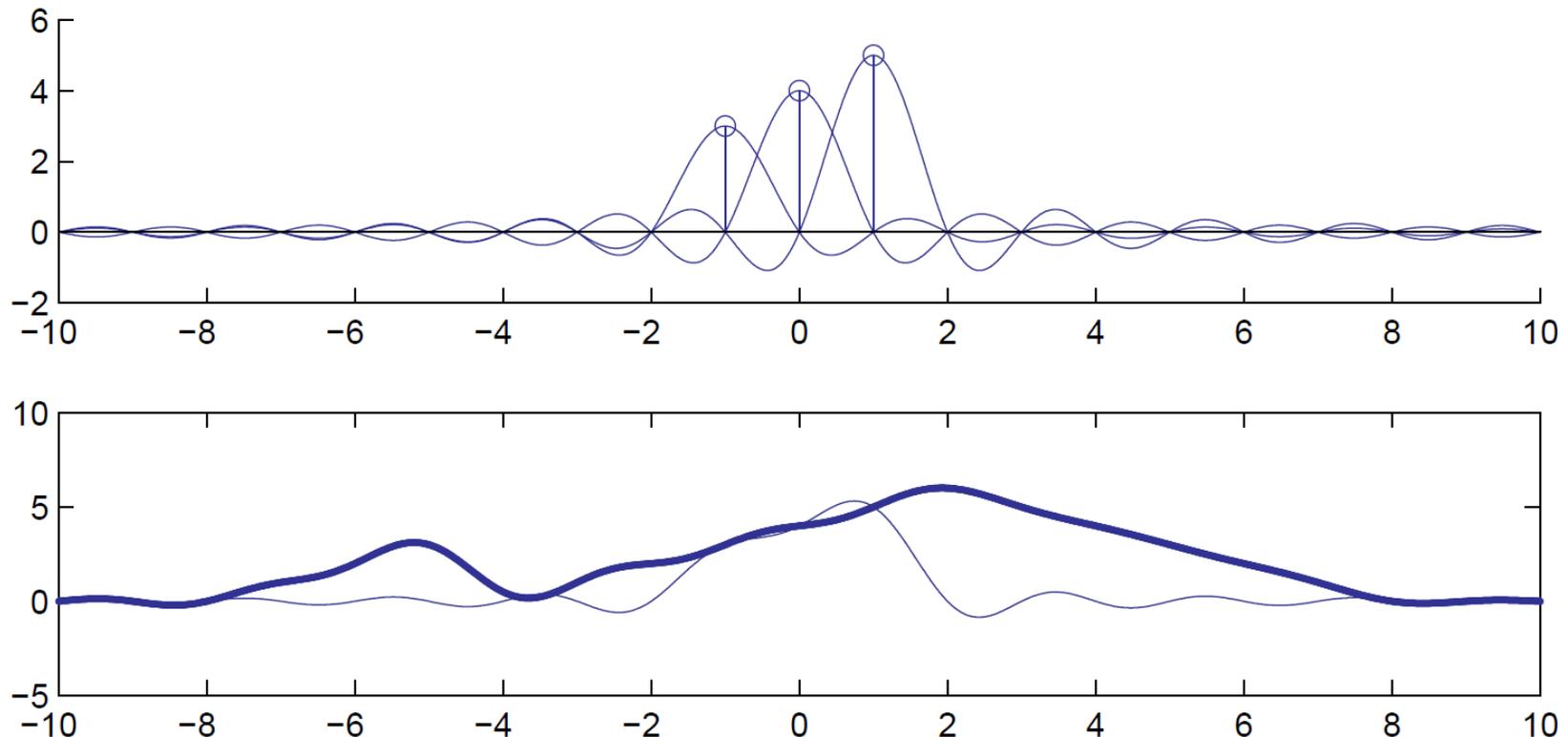
Comme h , ces fonctions respectent les hypothèses du théorème pour tout N , donc

$$\|f_N\|_2^2 = \|u_N\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |f(n)|^2 \rightarrow_N 0$$

Donc $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \operatorname{sinc}_n^\pi$ en sens L^2

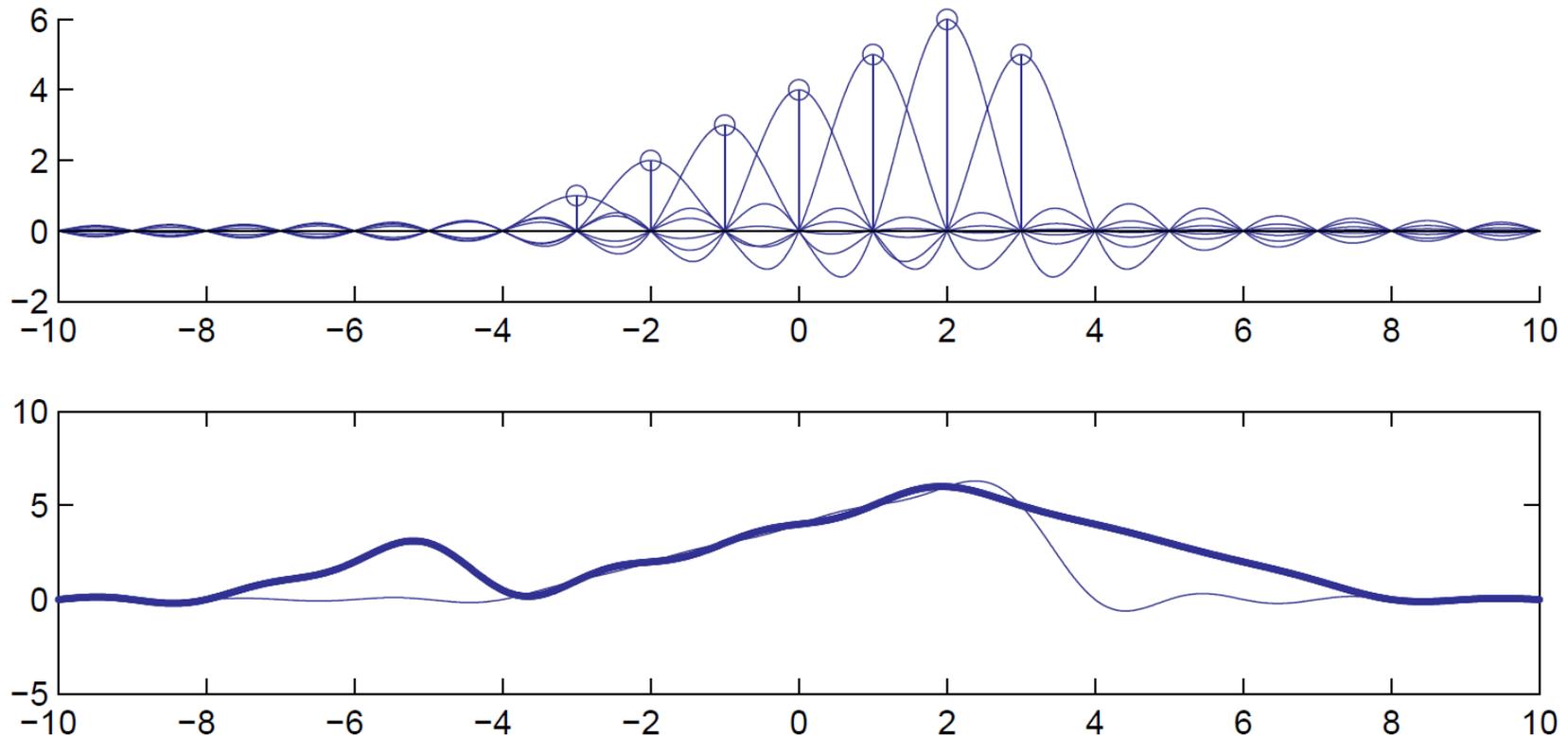
Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$
et sa formule équivalente en L^2 sont dites de
reconstruction parfaite ou idéale



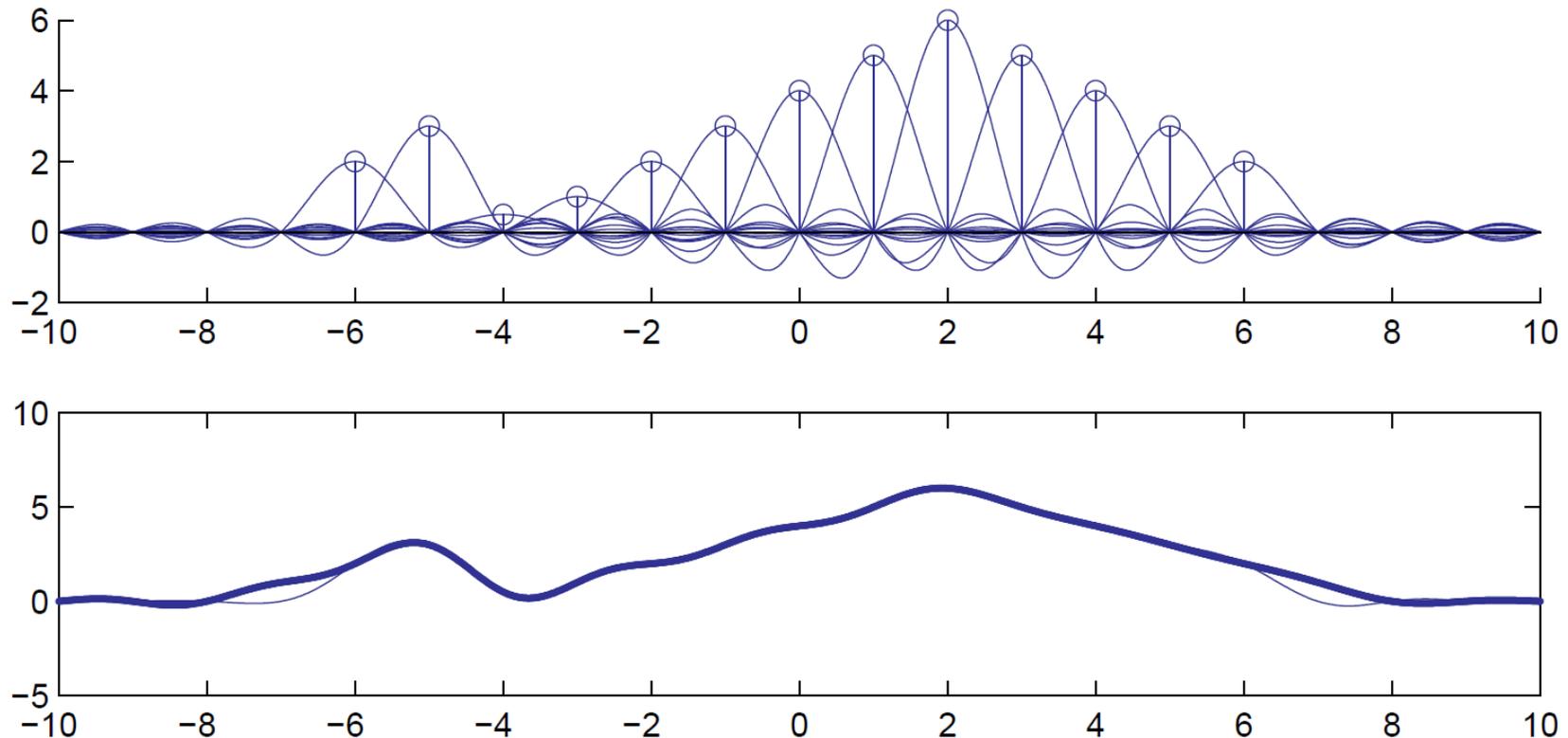
Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$
ou son équivalent en L^2 sont dites de reconstruction
parfaite ou idéale



Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$
ou son équivalent en L^2 sont dites de reconstruction
parfaite ou idéale



Autres reconstructions

Généralisation de la formule de reconstruction :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$$

Le problème ici c'est que pour tout t on a besoin d'une somme infini. Si on tronque, l'erreur décroît comme $1/N$

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) h(t - n)$$

Si h a support fini, la somme est finie, mais il peut y avoir une erreur de reconstruction

Autres reconstructions

Interpolation polynomiale : on utilise des polynômes qui passent par $f(n)$ aux instants n

Interpolation d'ordre zéro : $h(t) = h_0(t) = \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) h_0(t - n) \Leftrightarrow$$

$$\forall t \in \left[m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right], g(t) = f(m)$$

Autres reconstructions

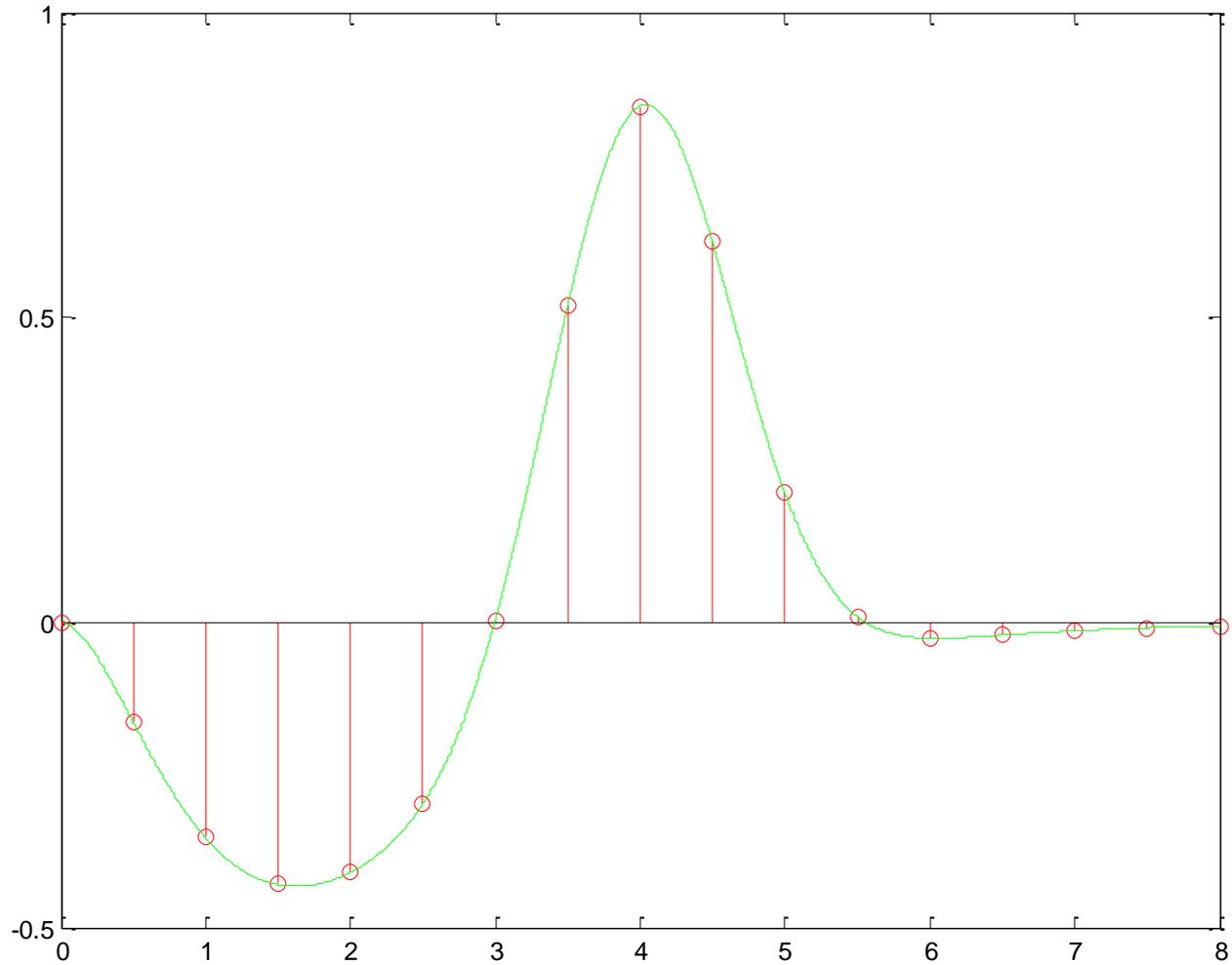
Interpolation d'ordre un :

$$h(t) = h_1(t) = (h_0 * h_0)(t) = (1 - |t|)\mathbb{I}_{[-1,1]}(t)$$

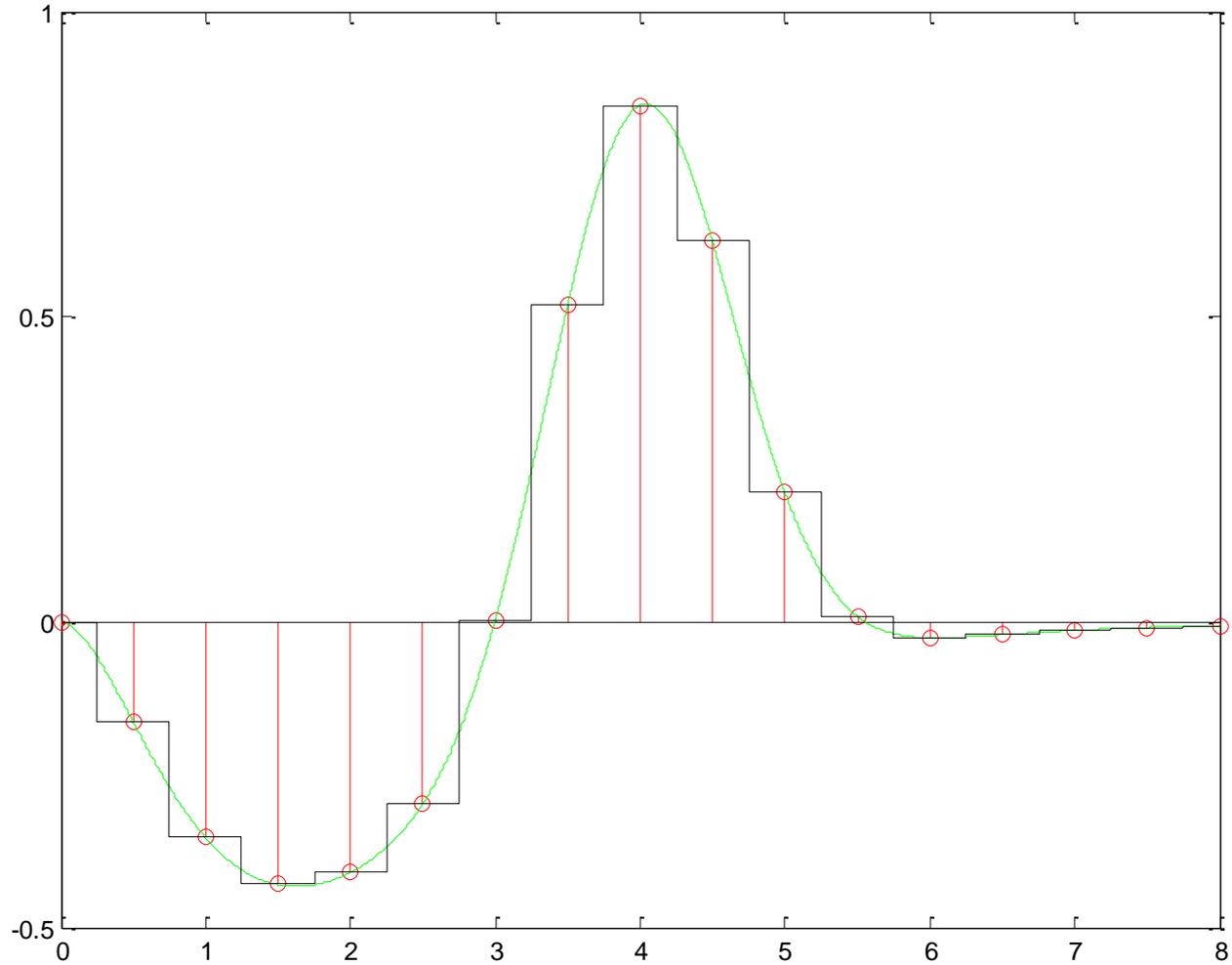
$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)h_1(t - n) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \forall t \in [m - 1, m], g(t) \\ = (t - m + 1)f(m - 1) + (m - t)f(m) \end{aligned}$$

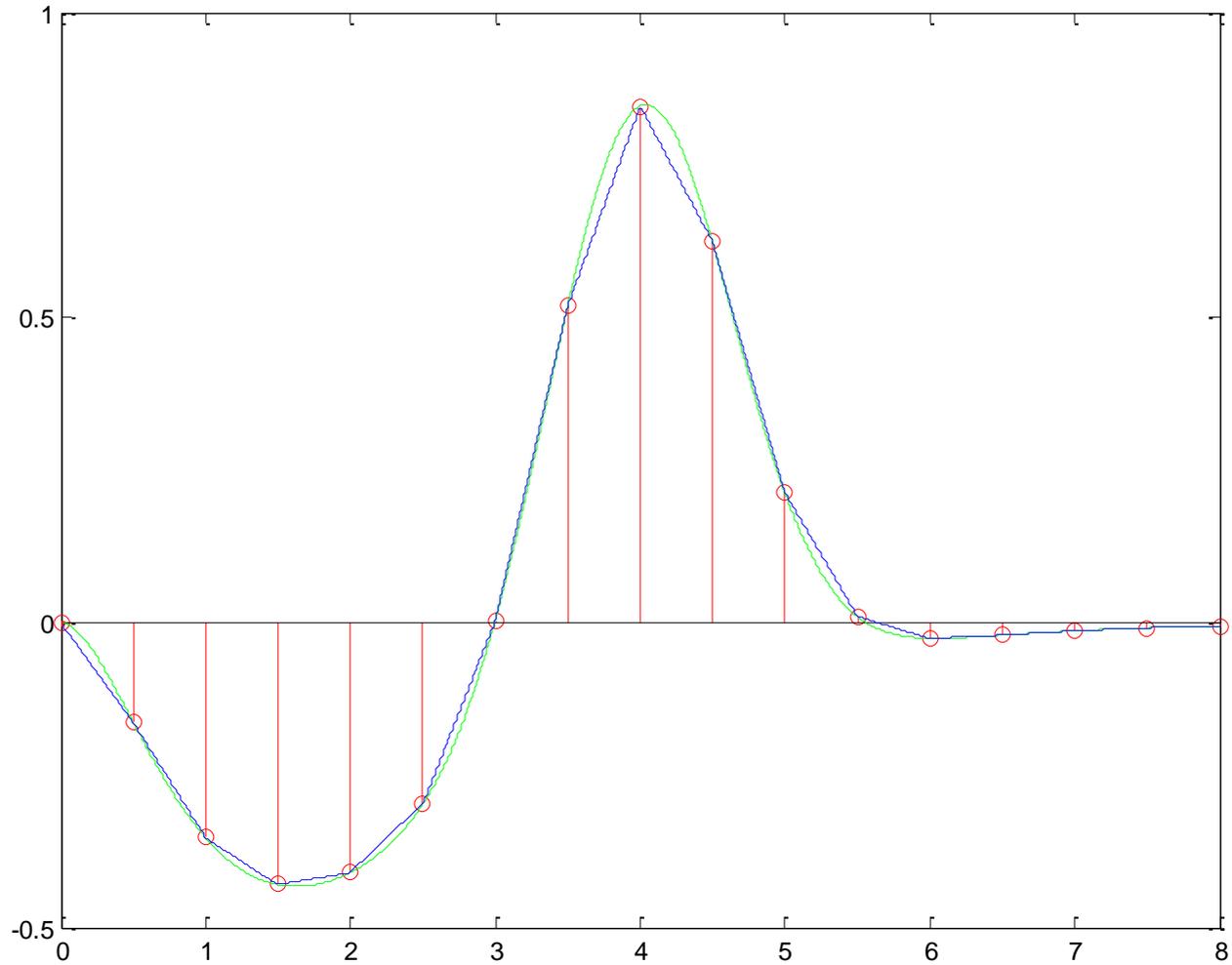
Autres reconstructions



Autres reconstructions



Autres reconstructions



Erreur de reconstruction

$$g(t) = \sum_n f(n)h(t - n) \text{ et}$$

$$\hat{g}(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\hat{h}(v)e^{-2i\pi vn} = \hat{h}(v) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(v + m)$$

$$\|f - g\|_2^2 = \|\hat{f} - \hat{g}\|_2^2 =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}(v) - \hat{g}(v)|^2 dv + \sum_{n \neq 0} \int_{n-1/2}^{n+1/2} |\hat{f}(v) - \hat{g}(v)|^2 dv$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}(v)|^2 |1 - \hat{h}(v)|^2 dv + \sum_{n \neq 0} \int_{n-1/2}^{n+1/2} |\hat{g}(v)|^2 dv$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}(v)|^2 |1 - \hat{h}(v)|^2 dv + \sum_{n \neq 0} \int_{-1/2}^{+1/2} |\hat{g}(v - n)|^2 dv$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{f}(v)|^2 |1 - \hat{h}(v)|^2 dv + \sum_{n \neq 0} \int_{-1/2}^{+1/2} |\hat{h}(v - n)\hat{f}(v)|^2 dv$$

Erreur de reconstruction

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \\ &= \int_{-1/2}^{+1/2} |\hat{f}(v)|^2 |1 - \hat{h}(v)|^2 dv + \int_{-1/2}^{+1/2} |\hat{f}(v)|^2 \sum_{n \neq 0} |\hat{h}(v - n)|^2 dv\end{aligned}$$

Reconstruction idéale : $\hat{h}(v) = 1$ en bande principale et nul sur les répliques

Le sinC satisfait ces conditions

Meilleure reconstruction

Soit $f \in L^2$ non limitée en bande

Soit $g(t) = \sum_n u_n \text{sinc}[\pi(t - n)]$

Quel est le choix de u_n qui minimise $\|f - g\|_2^2$?

Meilleure reconstruction

Soit $f_B = f * \text{sinc}^\pi \in L^2$: limitée en bande

Soit $f_H = f - f_B$ c'est-à-dire, $f = f_H + f_B$

Pour tout g limitée en bande (donc exprimable comme somme de sinc), on a

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \|f_H + f_B - g\|_2^2 \\ &= \|f_H\|_2^2 + \|f_B - g\|_2^2 + 2\langle f_H, f_B - g \rangle \\ &= \|f_H\|_2^2 + \|f_B - g\|_2^2\end{aligned}$$

Comme f_B et g satisfont les HP de Shannon, $g(n) = f_B(n)$ est le choix optimale, ce qui implique $u_n = f_B(n)$

Normalisation

Si on veut échantillonner f avec période T_e , on introduit $g(x) = f(T_e x)$

La fonction g est échantillonnée avec période 1, donc

1. $\forall |v| > \frac{1}{2}, \hat{g}(v) = 0$
2. $g(x) = \sum_n g(n) \text{sinc}[\pi(x - n)]$
3. $\sum_m g(m) e^{-2i\pi vm} = \sum_n \hat{g}(v + n)$

On écrit cela en se rappelant que:

$$g(x) = f(T_e x) \quad f(x) = g\left(\frac{x}{T_e}\right)$$
$$\hat{g}(v) = \frac{1}{T_e} \hat{f}\left(\frac{v}{T_e}\right) \quad \hat{f}(v) = T_e \hat{g}\left(\frac{v}{T_e}\right)$$

Normalisation

On obtient

- $1. \hat{f}(v) = T_e \hat{g}\left(\frac{v}{F_e}\right) = 0 \quad \forall \frac{|v|}{F_e} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |v| > \frac{F_e}{2}$
- $2. f(t) = g(t/T_e) = \sum_n g(n) \text{sinC}[\pi(t/T_e - n)] =$
 $f(t) = \sum_n f(nT_e) \text{sinC}\left[\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)\right]$
- $3. \sum_m f(mT_e) e^{-2i\pi vm} = \frac{1}{T_e} \sum_n \hat{f}\left(\frac{v+n}{T_e}\right)$

Chaîne de numérisation : filtre idéal à $F_e/2$ et reconstruction avec sinC^{π/T_e}