

Quantification Scalaire et Prédictive

Marco Cagnazzo

Département Traitement du Signal et des Images
TELECOM ParisTech

7 Décembre 2012

Plan

- 1 Introduction
 - Définitions
 - Quantification uniforme
- 2 Quantification scalaire optimale
 - Quantification optimale en HR
 - Algorithme de Lloyd-Max
- 3 Quantification scalaire prédictive
 - Gain de prédiction

Plan

- 1 Introduction
 - Définitions
 - Quantification uniforme
- 2 Quantification scalaire optimale
 - Quantification optimale en HR
 - Algorithme de Lloyd-Max
- 3 Quantification scalaire prédictive
 - Gain de prédiction

Définitions

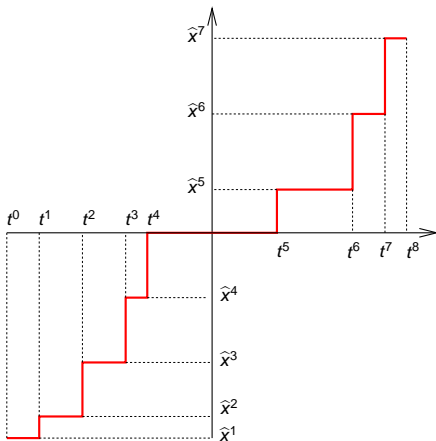
$$Q : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathcal{C} = \{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^L\} \subset \mathbb{R}$$

- \mathcal{C} : Dictionnaire, c'est un sous-ensemble discret de \mathbb{R}
- \hat{x}^i : niveau de quantification, niveau de restitution, codeword, mot de code
- $e = x - Q(x)$: Bruit de quantification
- $\Theta^i = \{x : Q(x) = \hat{x}^i\}$: Régions de décision

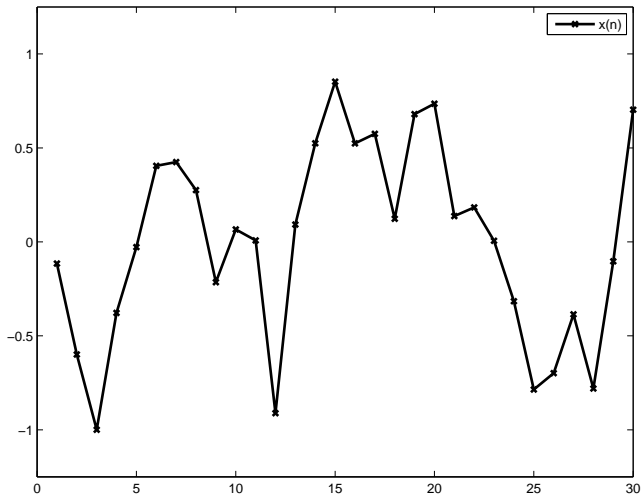
Un quantificateur scalaire (QS) est complètement défini pas les régions et les niveaux

Définition : Quantification scalaire (QS)

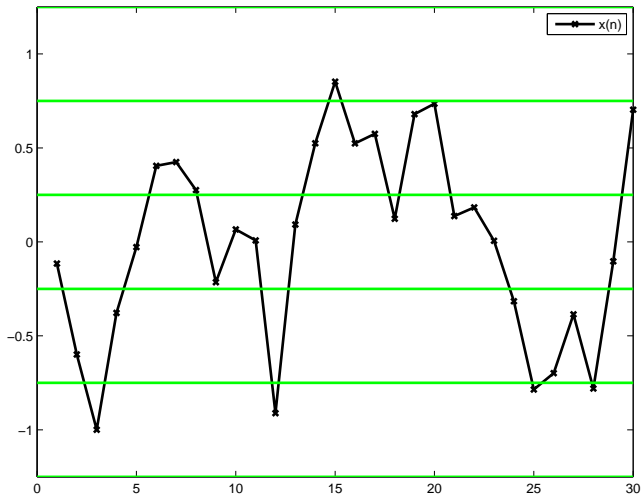
$$Q : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathcal{C} = \{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^L\} \subset \mathbb{R}$$



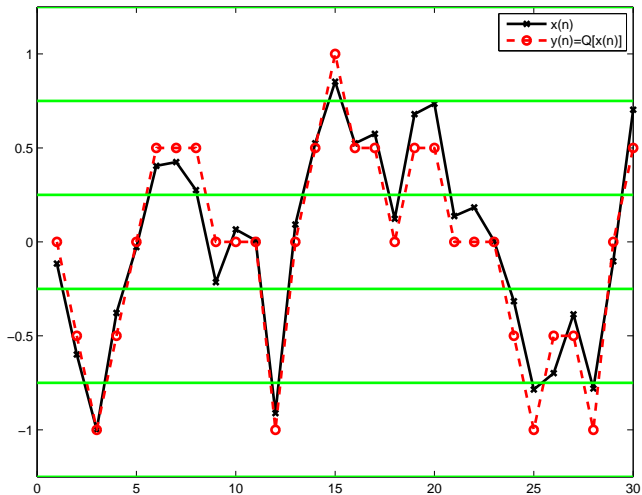
Exemple 1



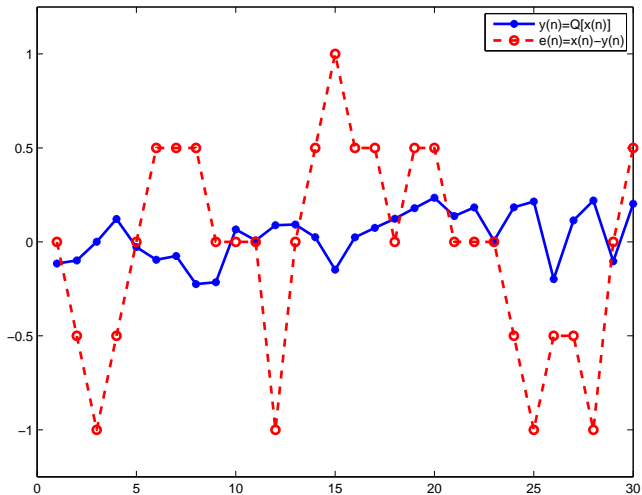
Exemple 1



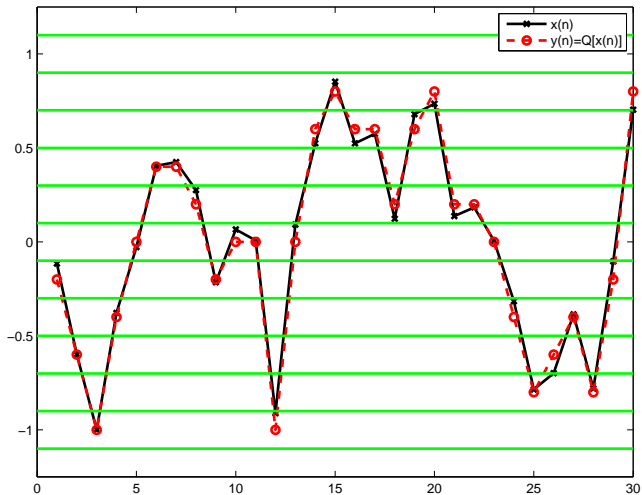
Exemple 1



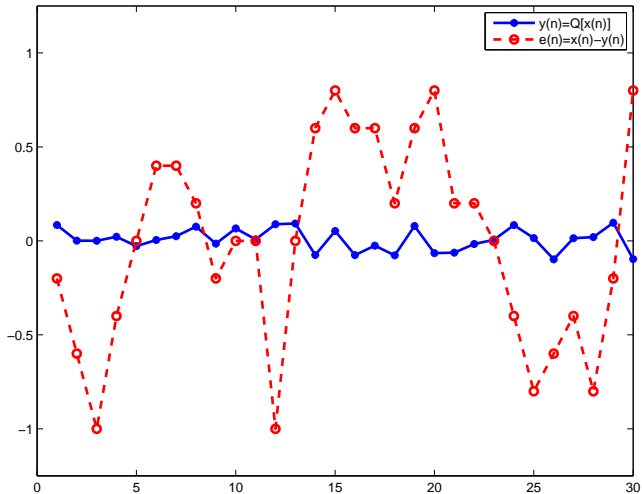
Exemple 1



Exemple 2



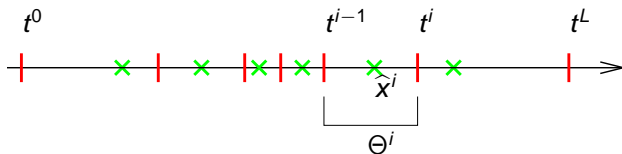
Exemple 2



Définitions : Quantificateur régulier

Typiquement on considère un QS *régulier* :

- 1) $\Theta^i = (t^{i-1}, t^i)$, avec $t^\ell \in \bar{\mathbb{R}}$
- 2) $\hat{x}^i \in \Theta^i$



Quantificateur régulier

Dans la suite on considérera uniquement des quantificateurs réguliers

- Pour un quantificateur régulier :

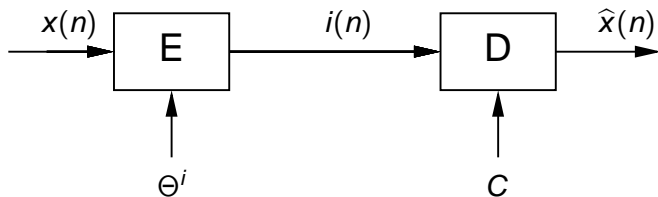
$$t^0 < \hat{x}^1 < t^1 < \hat{x}^2 < t^2 < \dots < \hat{x}^L < t^L$$

- Si le signal d'entrée est non-limité, $t^0 = -\infty$ et $t^L = +\infty$
- Les t^i sont appelés seuils de décision
- On définit Δ^i la longueur de Θ^i
- Les ensembles $\mathcal{T} = \{t^i\}$ et $\mathcal{C} = \{\hat{x}^i\}$ définissent complètement un QS régulier

Quantification d'un signal discret

- Typiquement on quantifie une suite (un signal discret) avec un QS régulier
- Les signaux d'intérêt ont une dynamique limitée $[-A, A]$
- Dans ce cas, $t^0 = -A$ et $t^L = +A$, toutes les régions sont finies, et l'erreur maximum est bornée
- La quantification consiste donc à associer à chaque échantillon d'entrée $x(n)$ un indice $i(n)$, qui détermine la région de décision, c.-à.-d. le mot de code $\hat{x}^{i(n)}$

Quantification comme codage/décodage



- Ce que le codeur envoie c'est les $i(n)$
- Le "décodage" associé à $i(n)$ le mot de code $\hat{x}^{i(n)}$
- Souvent (avec abus de langage) on appelle quantification l'application $x \rightarrow i$ et *quantification inverse* le décodage $i \rightarrow \hat{x}^i$

Débit d'un QS

- Le débit d'un QS est le nombre de bit nécessaire pour représenter les indices $i(n)$
- Par définition, $R = \log_2 L$
- Cela correspond à un codeur à longueur fixe et à un nombre de niveaux que soit une puissance entière de 2
- On verra dans le cours de *codage sans pertes* qu'il est souvent possible de réduire ce coût de codage

Distorsion

- On définit la distorsion ponctuelle comme l'erreur quadratique :

$$d[x(n), \hat{x}(n)] = |e(n)|^2 = |x(n) - \hat{x}(n)|^2$$

- Si on considère tout le signal $x(\cdot)$ de durée N , on utilise comme distorsion l'erreur quadratique moyenne :

$$D = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} d[x(n), \hat{x}(n)]$$

Distorsion : cas aléatoire

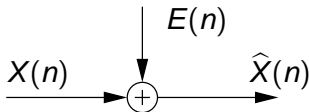
- Souvent on utilise des modèles aléatoires **centrés** pour les signaux. Dans ce cas, l'EQM associé à la QS du processus aléatoire X est :

$$D = \mathbb{E} \left\{ |X(n) - Q(X(n))|^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ |E(n)|^2 \right\}$$

- La distorsion est donc la puissance du processus aléatoire $E(n) = X(n) - Q(X(n))$
- On indiquera la distorsion d'un QS comme σ_Q^2

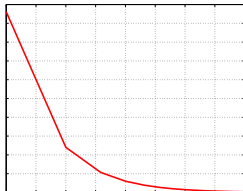
Distorsion : modèles pour le signal de bruit

- Un modèle commun pour la quantification est le modèle additif
- Le bruit de quantification est donc vu comme un bruit additif
- $E(n)$ et $X(n)$ sont modélés comme incorrélés
- $E(n)$ est modélé comme uniforme
- E est un processus blanc (corrélacion impulsicnnelle)



Courbe débit/distorsion d'un QS

- Souvent on caractérise un QS par rapport au nombre de niveaux L
- Le débit croît avec L : $R = \log_2 L$
- Pour tout les cas d'intérêt, la distorsion décroît avec L , mais la relation explicite entre D et L est plus difficile à déterminer
- En général, un QS est donc caractérisé par une courbe paramétrique $R(L), D(L)$
- Il est intéressant de trouver la relation explicite entre D et R : c'est la courbe débit/distorsion $D = D(R)$



Quantification uniforme

Un QS uniforme (QU) est caractérisé par :

- Régions de décision d'amplitude fixe : $\forall i, t^i = t^{i-1} + \Delta$
- Les niveaux de restitution sont les centres des régions :

$$\hat{x}^i = \frac{t^i + t^{i-1}}{2}$$

Le QU est simple, minimise l'erreur maximale et est optimale pour des v.a. uniformes.

On a encore :

- $\Delta^i = \Delta = 2A/L$

Quantification uniforme : calcul de la distorsion

Hypothèse : $X \sim \mathcal{U}(-A, A)$. Trouver $\sigma_Q^2 = \mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right]$

Quantification uniforme : calcul de la distorsion

Hypothèse : $X \sim \mathcal{U}(-A, A)$. Trouver $\sigma_Q^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$

$$\sigma_Q^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] = \int_{-A}^A p_X(u)[u - Q(u)]^2 du$$

Quantification uniforme : calcul de la distorsion

Hypothèse : $X \sim \mathcal{U}(-A, A)$. Trouver $\sigma_Q^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2]$

$$\begin{aligned}\sigma_Q^2 &= \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] &= \int_{-A}^A p_X(u)[u - Q(u)]^2 du \\ \dots &= \sum_{i=1}^L \int_{\Theta_i} \frac{1}{2A} [u - \hat{x}^i]^2 du &= \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^L \int_{\hat{x}^i - \Delta/2}^{\hat{x}^i + \Delta/2} [u - \hat{x}^i]^2 du \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^L \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} t^2 dt &= \frac{1}{2A} L \frac{\Delta^3}{12} = \frac{\Delta^2}{12}\end{aligned}$$

En effet le bruit de quantification dans ce cas est une v.a. uniforme en $(-\Delta/2, \Delta/2)$

Quantification uniforme : courbe D(R)

$$D = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4A^2}{12L^2} = \frac{A^2}{3 \cdot 2^{2R}} = \sigma_X^2 2^{-2R}$$

On peut mesurer la qualité par le rapport signal sur bruit :

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \log_{10} \frac{E\{X^2\}}{D} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 2^{-2R}} \\ &= 10 \log_{10} 2^{2R} \approx 6R \end{aligned}$$

Quantification uniforme en haute résolution

- Hypothèse : $L \rightarrow +\infty$, X v.a. quelconque
- En HR, pour tout Θ^i on approxime p_X comme constante.
- Donc le bruit de quantification en Θ^i est $\mathcal{U}(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$
- Pour la probabilité totale, $E \sim \mathcal{U}(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$
- Donc :

$$D = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2}{3} 2^{-2R}$$

Quantification uniforme en haute résolution

On peut écrire :

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{E\{X^2\}}{D} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{A^2/3} 2^{2R} \approx 6R - 10 \log_{10} \frac{\gamma^2}{3}$$

où on a défini $\gamma^2 = \frac{X_{\max}^2}{\sigma_X^2} = \frac{A^2}{\sigma_X^2}$ rapport entre puissance de crête et puissance moyenne (facteur de charge)

On trouve encore :

$$D = \frac{A^2}{3} 2^{-2R} = \frac{\gamma^2}{3} \sigma_X^2 2^{-2R} = K_X \sigma_X^2 2^{-2R}$$

Le facteur de charge est donc un paramètre unique qui caractérise les performances de la QU en HR.

Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Image Originale, 24 bpp



Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 21 bpp PSNR 47.19 dB TC 1.143



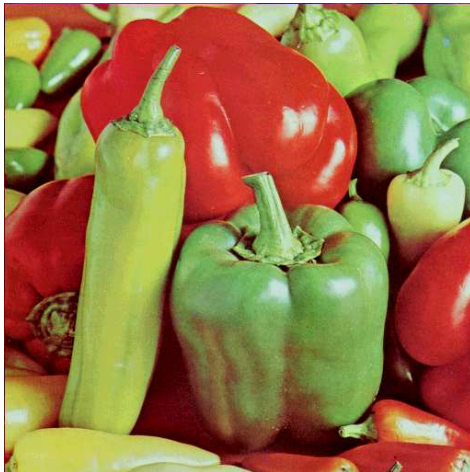
Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 18 bpp PSNR 42.38 dB TC 1.333



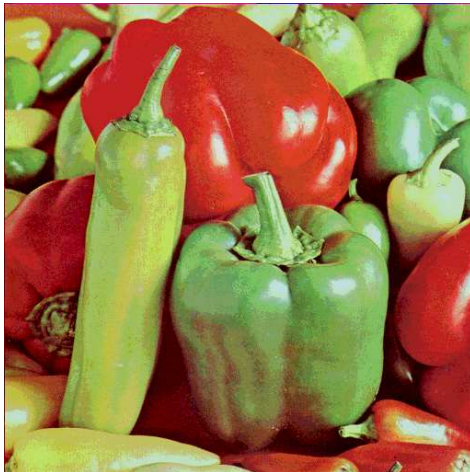
Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 15 bpp PSNR 36.97 dB TC 1.600



Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 12 bpp PSNR 31.40 dB TC 2.000



Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 9 bpp PSNR 29.26 dB TC 2.667



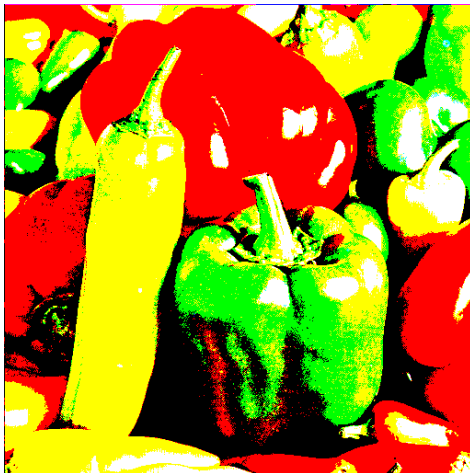
Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 6 bpp PSNR 27.83 dB TC 4.000



Quantification scalaire : exemple sur image couleurs

Débit 3 bpp PSNR 25.75 dB TC 8.000



Plan

- 1 Introduction
 - Définitions
 - Quantification uniforme
- 2 **Quantification scalaire optimale**
 - Quantification optimale en HR
 - Algorithme de Lloyd-Max
- 3 Quantification scalaire prédictive
 - Gain de prédiction

Quantification optimale

Pour une densité de probabilité $p_X(x)$ donnée, déterminer le quantificateur qui minimise la distorsion pour un débit donné. Problème équivalent à déterminer les seuils t^i et les niveaux \hat{x}^i .

Solutions :

- Solution analytique en *haute résolution*: $D = h_X \sigma_X^2 2^{-2R}$
- Si l'hypothèse de haute résolution n'est pas satisfaite, on peut atteindre un minimum local de la distorsion avec l'algorithme de Max-Lloyd

Quantification optimale en haute résolution

En hypothèse de haute résolution ($L \rightarrow +\infty$),

$$\forall x \in \Theta^i = (t^{i-1}, t^i),$$

$$\forall i \in \{1, \dots, L\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, L\},$$

$$p_X(x) \approx p_X(\hat{x}^i)$$

$$\Delta(i) \rightarrow 0$$

$$\hat{x}^i = \frac{t^{i-1} + t^i}{2}$$

On définit $\Delta(i) = t^i - t^{i-1}$ et $P(i) = \text{Prob}\{X \in \Theta^i\}$

En HR, $P(i) = p_X(\hat{x}^i)\Delta(i)$

Quantification optimale en haute résolution

Distorsion σ_Q^2 :

$$\sigma_Q^2 = \sum_{i=1}^L p_X(\hat{x}^i) \int_{t^{i-1}}^{t^i} (u - \hat{x}^i)^2 du$$

Comme

$$\int_{t^{i-1}}^{t^i} (u - \hat{x}^i)^2 du = \int_{-\Delta(i)/2}^{\Delta(i)/2} u^2 du = \frac{\Delta(i)^3}{12}$$

On a

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^L P(i) \Delta(i)^2$$

Le problème devient donc : rechercher les amplitudes des intervalles qui minimisent $\sigma_Q^2 = \frac{1}{12} E\{\Delta^2\}$

Quantification optimale en haute résolution

- Minimisation de $\sigma_Q^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^L P(i)\Delta(i)^2$
- Posons $\alpha^3(i) = p_X(\hat{x}^i)\Delta^3(i) = P(i)\Delta(i)^2$.

$$\sum_{i=1}^L \alpha(i) = \sum_{i=1}^L [p_X(\hat{x}^i)]^{\frac{1}{3}} \Delta(i) \approx \int_{\mathbb{R}} [p_X(u)]^{\frac{1}{3}} du = \text{cste}$$

- Donc on doit minimiser la somme de cubes de L nombres positifs ayant somme constante.
- Solution : $\alpha(1) = \alpha(2) = \dots = \alpha(L)$

Quantification optimale en haute résolution

- Tous les $\alpha^3(i)$ ont la même valeur : $\alpha^3(i) = \alpha^3$
- Donc

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^L \alpha^3(i) = \frac{L}{12} \alpha^3$$

Mais comme

$$\alpha = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \alpha(i) = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} [p_X(u)]^{\frac{1}{3}} du$$

Alors

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{12L^2} \left[\int_{\mathbb{R}} [p_X(u)]^{\frac{1}{3}} du \right]^3$$

- C'est la **formule de Bennett**

Quantification optimale en haute résolution

- Soit $U = \frac{X}{\sigma_X}$
- Si $U \sim p_U(u)$, alors $X \sim \frac{1}{\sigma_X} p_U\left(\frac{u}{\sigma_X}\right)$
- Calculer la distorsion de quantification optimale de X en fonction de p_U et σ_X

Quantification optimale en haute résolution

- Soit $U = \frac{X}{\sigma_X}$
- Si $U \sim p_U(u)$, alors $X \sim \frac{1}{\sigma_X} p_U\left(\frac{u}{\sigma_X}\right)$
- Calculer la distorsion de quantification optimale de X en fonction de p_U et σ_X

$$\int_{\mathbb{R}} [p_X(x)]^{1/3} dx = \frac{1}{\sigma_X^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3} \left(\frac{x}{\sigma_X} \right) dx = \sigma_X^{2/3} \int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3}(t) dt$$

Avec $t = \frac{x}{\sigma_X}$ et $dt = \frac{dx}{\sigma_X}$.

Donc :

$$\sigma_Q^2 = 2^{-2R} \sigma_X^2 \frac{1}{12} \left[\int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3}(t) dt \right]^3$$

Quantification optimale en haute résolution

Donc $\sigma_Q^2 = c_X \sigma_X^2 2^{-2R}$ avec

$$c_X = \frac{1}{12} \left[\int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3}(t) dt \right]^3$$

c_X est appelé facteur de forme, car il dépend seulement de la forme de la PDF de X (c.-à.-d. de p_U) et pas de sa variance

Facteurs de forme pour PDF communes :

	Uniforme	Gaussienne
c_X	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \approx 2.72$

Quantification optimale en haute résolution

Pour le quantificateur optimale, $\alpha(1) = \alpha(2) = \dots = \alpha(L)$
Donc : $p_X(\hat{x}^1)\Delta^3(1) = p_X(\hat{x}^2)\Delta^3(2) = \dots = p_X(\hat{x}^L)\Delta^3(L)$.
Mais si X est uniforme, $p_X(\hat{x}^1) = p_X(\hat{x}^2) = \dots = p_X(\hat{x}^L)$ et donc :

$$\Delta(1) = \Delta(2) = \dots = \Delta(L)$$

Le quantificateur optimale pour une v.a. uniforme est le QU

Pour les autres v.a.,

$$p_X^{1/3}(\hat{x}^i)\Delta(i) = \alpha \Rightarrow \Delta(i) \propto p_X(\hat{x}^i)^{-1/3}$$

Quantification optimale en haute résolution

Variable uniforme

- Pour une v.a. uniforme, $p_X = \frac{1}{2A} \text{Rect}_{-A,A}(x)$, $\sigma_X^2 = \frac{A^2}{3}$
- Alors pour $U = \sqrt{3}X/A$ on a $p_U(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Rect}_{-\sqrt{3},\sqrt{3}}(t)$ et :

Quantification optimale en haute résolution

Variable uniforme

- Pour une v.a. uniforme, $p_X = \frac{1}{2A} \text{Rect}_{-A,A}(x)$, $\sigma_X^2 = \frac{A^2}{3}$
- Alors pour $U = \sqrt{3}X/A$ on a $p_U(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Rect}_{-\sqrt{3},\sqrt{3}}(t)$ et :

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3}(t) dt \right]^3 &= \left[\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{1/3} dt \right]^3 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left[\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dt \right]^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2\sqrt{3})^3 = 12 \end{aligned}$$

$$c_X = 1$$

$$D = \sigma_X^2 2^{-2R}$$

$$\text{SNR} = 6R$$

Quantification optimale en haute résolution

Variable gaussienne

- $p_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Quantification optimale en haute résolution

Variable gaussienne

- $p_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} p_U^{1/3}(t) dt \right]^3 &= \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi)^{1/6}} e^{-\frac{t^2}{6}} dt \right]^3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2\pi 3}}{\sqrt{2\pi 3}} e^{-\frac{t^2}{2 \cdot 3}} dt \right]^3 = (2\pi)^{-1/2} \left(\sqrt{2\pi 3} \right)^3 = 6\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$c_X = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

$$D = c_X \sigma_X^2 2^{-2R}$$

$$\text{SNR} = 6R - 4.35\text{dB}$$

Quantification optimale non-HR

- Les hypothèses d'haute résolution ne sont pas toujours respectées
- Les cas plus intéressants sont au contraire ceux où le débit disponible est faible
- **On dispose pas de formules pour la quantification optimale à faible débit**
- En revanche, on peut trouver des conditions nécessaires et pour avoir un QO
- Ces conditions permettent de déterminer un algorithme de quantification (algorithme de Lloyd-Max)

Formulation du problème

- Un quantificateur régulier est caractérisé par l'ensemble des seuils $\mathcal{T} = \{t^0, t^1, t^2, \dots, t^L\}$ et l'ensemble des niveau $\mathcal{C} = \{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^L\}$
- L'optimisation devrait se faire conjointement sur \mathcal{C} et \mathcal{T}
- Par contre on a des conditions nécessaires d'optimalité:
 - Pour \mathcal{C} étant donné \mathcal{T} ; et
 - pour \mathcal{T} étant donné \mathcal{C} .

Condition du plus proche voisin

- Les niveaux sont donnés, on doit choisir les seuils
- L'objectif est de minimiser la distorsion :

$$\Theta^i = \{x \in \mathbb{R} : \forall j \neq i, d(x, \hat{x}^i) \leq d(x, \hat{x}^j)\}$$

- Cette équation est appelée *règle du plus proche voisin*

Condition du plus proche voisin

- Les niveaux sont donnés, on doit choisir les seuils
- L'objectif est de minimiser la distorsion :

$$\Theta^i = \{x \in \mathbb{R} : \forall j \neq i, d(x, \hat{x}^i) \leq d(x, \hat{x}^j)\}$$

- Cette équation est appelée *règle du plus proche voisin*
- Cela se traduit, pour les seuils :

$$t^i = \frac{\hat{x}^i + \hat{x}^{i+1}}{2}$$

Condition du centroïde

- Les seuils sont donnés, il faut optimiser le dictionnaire
- On doit minimiser la distorsion

$$\begin{aligned} D(\mathcal{C}) &= \mathbb{E} \left[(X - Q(X))^2 \right] = \int_{\mathcal{R}} p_X(x) \left[(x - Q(x))^2 \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^L \int_{t^i}^{t^{i+1}} p_X(x) (x - \hat{x}^i)^2 dx \end{aligned}$$

- On impose

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{x}^i} = 0$$

Condition du centroïd

On trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \hat{x}^i} &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \int_{t^i}^{t^{i+1}} p_X(x)(x - \hat{x}^i)^2 dx \\ &= 2 \int_{t^i}^{t^{i+1}} xp_X(x) dx - 2\hat{x}^i \int_{t^i}^{t^{i+1}} p_X(x) dx = 0 \\ \hat{x}^i &= \frac{\int_{t^i}^{t^{i+1}} xp_X(x) dx}{\int_{t^i}^{t^{i+1}} p_X(x) dx} = E[X|X \in \Theta^i]\end{aligned}$$

C'est la condition du centroïd

Quantification optimale

Algorithme de Lloyd-Max

Algorithme de Lloyd-Max

- 1 initialiser les régions (p.e. uniforme)
- 2 trouver les *meilleures* régions pour le dictionnaire donné

$$t^i = \frac{\hat{x}^i + \hat{x}^{i+1}}{2}, \quad i \in \{1, \dots, L-1\}$$

- 3 trouver le *meilleur* dictionnaire pour les régions données

$$\hat{x}^i = \mathbb{E}[X|X \in \Theta_i] = \frac{\int_{\Theta_i} x p_X(x) dx}{\int_{\Theta_i} p_X(x) dx}$$

- 4 boucler en 2 jusqu'à la convergence

Algorithme de Lloyd-Max pour les données

- On a pas toujours les distributions de probabilités des signaux, souvent on a seulement un ensemble de M observations
- L'algorithme de Lloyd-Max se modifie comme il suit :
 - 1 Soit $\mathcal{X} = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$ l'ensemble des données à quantifier
 - 2 Initialisation ($k=0$) avec un dictionnaire quelconque (p.e. uniforme) : $\mathcal{C}^{(k)} = \{\hat{x}_0^i\}_{i=1, \dots, L}$
 - 3 Règle du plus proche voisin :

$$W_k^i = \{u_m \in \mathcal{X} : \forall j \neq i \|u_m - \hat{x}_k^i\| \leq \|u_m - \hat{x}_k^j\|\}$$

- 4 Règle du centroïde : $\hat{x}_{k+1}^i = \frac{1}{|W_k^i|} \sum_{u_m \in W_k^i} u_m$
- 5 Boucler en 3 jusqu'à convergence

Convergence de l'algorithme de Lloyd-Max

- Rien n'assure la convergence à l'optimum global
- Le résultat dépend de l'**initialisation**
- En tout cas, à chaque itération la distorsion n'augmente pas
- Critère d'arrêt :
 - Soit $D^{(k)}$ la distorsion du k -ème quantificateur
 - Une condition d'arrêt typique est :

$$\frac{D^{(k)} - D^{(k+1)}}{D^{(k)}} \leq \epsilon$$

Initialisation de LM

- Initialisation uniforme : $\hat{x}^n = A_0 + n\Delta \forall n = 1, \dots, L$
- Initialisation aléatoire : les mots de code sont distribués comme le signal d'entrée ou comme un signal qui optimise les performances RD
- Pruning
- Pairwise nearest neighbours

Algorithme de Lloyd-Max

Bilan de la quantification scalaire

- $D(R)$, QU et v.a. uniforme : $D = \sigma_X^2 2^{-2R}$
- $D(R)$, QU et v.a. non uniforme en HR : $D = K_X \sigma_X^2 2^{-2R}$
- $D(R)$, QO et v.a. non uniforme en HR : $\sigma_Q^2 = c_X \sigma_X^2 2^{-2R}$
- c_X est une constante qui dépend de la distribution de X (facteur de forme)
 - $c_X = 1$ dans le cas uniforme
 - $c_X = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$ dans le cas gaussien
- À faible résolution, LM produit un QNU localement optimale

Plan

- 1 Introduction
 - Définitions
 - Quantification uniforme
- 2 Quantification scalaire optimale
 - Quantification optimale en HR
 - Algorithme de Lloyd-Max
- 3 Quantification scalaire prédictive
 - Gain de prédiction

Codage prédictive

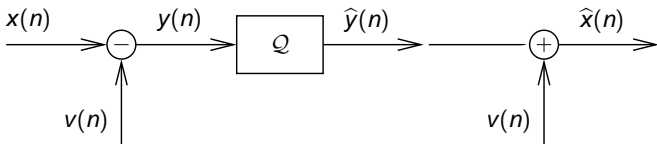
Principes

- La seule quantification est peu efficace pour la compression
- Modèle sous-jacent trop simple : échantillons indépendants et tous également importants
- Idée : exploiter la corrélation entre échantillon par une *prédiction*
- Réduction de la variance

Schéma de codage

Schéma en boucle ouverte

- L'échantillon $X(n)$ est lié aux échantillons passés (et futurs)
- On utilise les voisins de $X(n)$ pour le prédire
- Si on fait une bonne prédiction, $\hat{X}(n) \approx X(n)$



- Comment on fait la prédiction ?
- Qu'est-ce qu'on gagne ?

Gain de prédiction

Erreur sur la prédiction = erreur sur le signal :

$$q(n) = y(n) - \hat{y}(n) = x(n) - v(n) - \hat{x}(n) + v(n) = \bar{q}(n)$$

Donc l'objectif de la QS prédictive devient celui de minimiser la distorsion de y

Gain de codage :

$$\text{SNR}_p = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{D} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} + 10 \log_{10} \frac{\sigma_Y^2}{D} = G_P + G_Q$$

La prédiction doit produire un signal d'erreur dont la variance est inférieure à la variance du signal d'origine

Exemple

$$X(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$V(n) = X(n-1)$$

$$E[X(n)X(m)] = \sigma^2 \rho^{|n-m|}$$

$$\rho : \text{GP} > 0 ?$$

Exemple

$$\begin{aligned} X(n) &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) & \mathbb{E}[X(n)X(m)] &= \sigma^2 \rho^{|n-m|} \\ V(n) &= X(n-1) & \rho &: G_P > 0? \end{aligned}$$

$Y(n) = X(n) - X(n-1)$ v.a. Gaussienne centrée

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(X(n) - X(n-1))^2] = 2\sigma^2 - 2\sigma^2\rho$$

$$G_P = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{2(1-\rho)\sigma^2}$$

$$G_P > 0 \Leftrightarrow \rho > \frac{1}{2}$$

Prédicteurs

- On s'intéressera aux prédicteurs linéaires : simples et optimaux dans le cas Gaussien

$$v(n) = - \sum_{i=1}^P a_i x(n-i) \quad \text{Filtre de prédiction à } P \text{ paramètres}$$

$$y(n) = x(n) - v(n) = \sum_{i=0}^P a_i (x_n - 1) \quad \text{Erreur de prédiction}$$

- Avec $a_0 = 1$.
- On peut donc voir y comme filtrage de x avec le filtre de fonction de transfert :

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}$$

- Filtre optimale : minimisation de σ_Y^2

Modèle AR du signal

- Si $Y(z) = A(z)X(z)$, $X(z) = \frac{Y(z)}{A(z)}$
- On montre que, si la prédiction est optimale, $Y(z)$ est du bruit blanc de puissance σ_Y^2
- Dans ce cas, la DSP de X est $S_X(f) = \frac{\sigma_Y^2}{|A(f)|^2}$
- Le modèle sous-jacente pour X est celui d'un signal auto-regressif :

$$X(z) = \frac{Y(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}} \quad \Leftrightarrow$$
$$x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_P x(n-P) = y(n)$$

- $x(n)$ est donc le filtrage AR de $y(n)$

Choix du prédicteur

Problème :

Trouver le vecteur (filtre linéaire) \underline{a} qui minimise :

$$\sigma_Y^2 = E \left\{ Y^2(n) \right\} = E \left\{ \left[X(n) + \sum_{i=1}^P a_i X(n-i) \right]^2 \right\}$$

Choix du prédicteur

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E\{X^2(n)\} + 2 \sum_{i=1}^P a_i E\{X(n)X(n-i)\} + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P a_i a_j E\{X(n-i)X(n-j)\} \\ &= \sigma_X^2 + 2\underline{r}^t \underline{a} + \underline{a}^t \mathbf{R}_X \underline{a}\end{aligned}$$

avec :

$$\underline{r} = [r_X(1) \dots r_X(P)] \quad \mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} r_X(0) & r_X(1) & \dots & r_X(P-1) \\ r_X(1) & r_X(2) & \dots & r_X(P-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_X(P-1) & r_X(P-2) & \dots & r_X(0) \end{bmatrix}$$

$$r_X(k) = E\{X(n)X(n-k)\}$$

Choix du prédicteur

Minimisation de la variance de Y :

$$\frac{\partial \sigma_Y^2}{\partial \underline{a}} = 2\underline{r} + 2\mathbf{R}_X \underline{a} = 0$$

On a donc :

$$\underline{a}^{\text{opt}} = -\mathbf{R}_X^{-1} \underline{r} \qquad \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \underline{r}^t \underline{a}^{\text{opt}}$$

L'autocorrélation r_X peut généralement être estimé avec :

$$\hat{r}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} X(n)X(n+k)$$

Gain de prédiction

- Gain de prédiction : rapport entre la puissance de l'erreur sans et avec prédiction.

$$G_P(P) = 10 \log_{10} \frac{c\sigma_X^2 2^{-2R}}{c\sigma_Y^2 2^{-2R}} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$$
$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \underline{r}^t \underline{a}^{\text{opt}}} = \frac{r_X(0)}{r_X(0) + \sum_{i=1}^P a_i^{\text{opt}} r_X(i)}$$

- Quand i croît, les $r_X(i)$ sont normalement de plus en plus petits (la corrélation entre des échantillons éloignés est de plus en plus petite)

Gain de prédiction

- On peut montrer que : $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_X^2}{[\det \mathbf{R}_P]^{1/P}}$

- Valeur asymptotique du gain de prédiction

$$G_P = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_X^2}{[\det \mathbf{R}_P]^{1/P}}$$

- Cette valeur est liée au degré de corrélation du signal
- On peut montrer que :

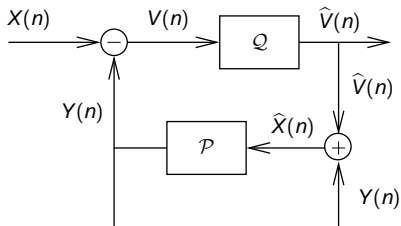
$$G_P = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) df}{\exp\left(\int_{-1/2}^{1/2} \ln S_X(f) df\right)} \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_X\left(\frac{k}{N}\right)}{\prod_{k=0}^{N-1} \left[S_X\left(\frac{k}{N}\right)\right]^{1/N}}$$

- Rapport entre moyennes arithmétiques et géométriques

Schéma de codage

Schéma prédictif (DPCM) complet (boucle fermée)

Encodeur :



Décodeur :

