Transformation de Fourier sur Z(TFtd)

Rappel sur les ondes de Fourier

- Nous avons vu que tout SLI agit sur les ondes de Fourier en les multipliant par une constante qui dépend de la fréquence. Cette constante s'appelle réponse fréquentielle.
- Elles vérifient toujours $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$
- Dans le cas d'un SLI sur Z on a la formule:
- $C(\nu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-2i\pi\nu n}$

C est la réponse fréquentielle et h la réponse impulsionnelle

Espaces des suites

- Les suites bornées :

$$u \in l^\infty \Leftrightarrow \|u\|_\infty = \sup_n \{|u_n|\} < +\infty$$

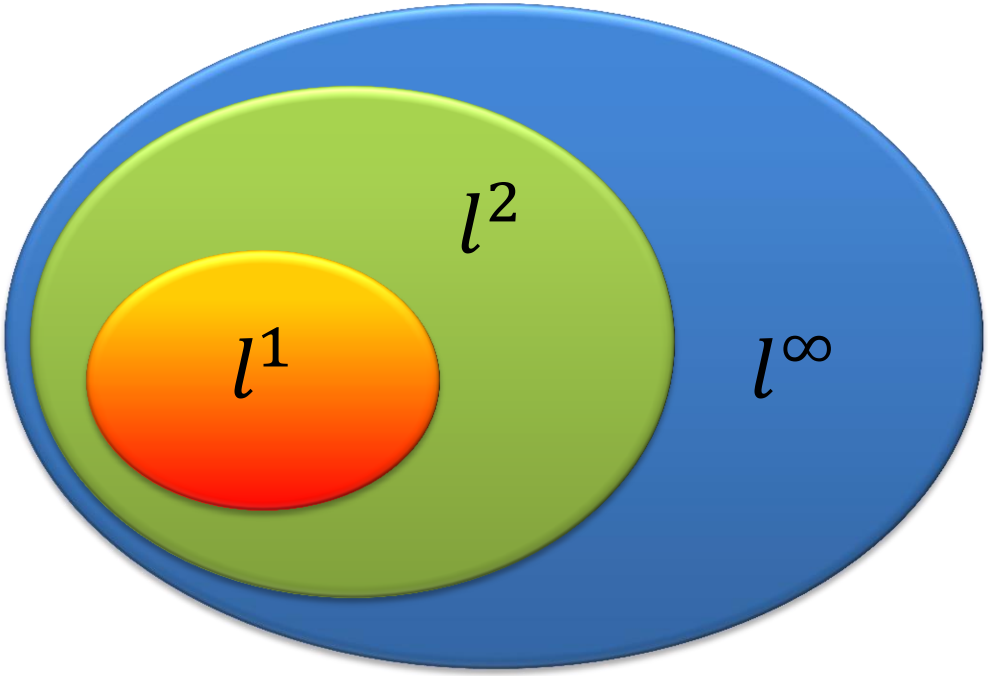
- Les suites d'énergie finie

$$u \in l^2 \Leftrightarrow \|u\|_2 = \sqrt{\sum_n |u_n|^2} < +\infty$$

- Les suites sommables

$$u \in l^1 \Leftrightarrow \|u\|_1 = \sum_n |u_n| < +\infty$$

Règles de calcul



$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$

$u \in l^2, v \in l^2 \Rightarrow u.v \in l^1$
$u \in l^1, v \in l^\infty \Rightarrow u.v \in l^\infty$

Convolution

- On a le tableau suivant

$*$	l^1	l^2	l^∞
l^1	l^1	l^2	l^∞
l^2	l^2	l^∞	-
l^∞	l^∞	-	-

- Règle pratique :

$$l^1 * l^p \to l^p$$
$$l^2 * l^2 \to l^\infty$$

- Dans les autres cas la convergence n'est pas assurée (exemple : convolution de 2 suites constantes)

Définition de la TFtD pour une suite sommable

- Si u est une suite de l^1 alors on définit sa TFtD, qui est une fonction sur [-1/2,1/2[, par

$$\forall \nu \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, \qquad \mathcal{F}[u](\nu) = \hat{u}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi\nu n}$$

- $\hat{u}(\nu)$ est une fonction continue sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$
- La formule donnée est immédiatement étendue à $\mathbb{R}$, où $\hat{u}$ est **périodique** et continue

Quelques propriétés

$u, v \in l^1; \nu_0 \in [-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}[;$

$\phi: n \in \mathbb{Z} \to e^{2i\pi\nu_0 n}, \qquad \psi: \nu \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\to e^{-2i\pi m\nu}$

$u = \delta^m \Rightarrow \hat{u}(\nu) = \psi(\nu)$

$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\hat{v}$

$\mathcal{F}(uv) = \hat{u} * \hat{v}$

$[\mathcal{F}(\phi.u)](\nu) = \hat{u}(\nu - \nu_0)$

$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}.\psi$

u réelle $\Rightarrow \hat{u}(-\nu) = \overline{\hat{u}(\nu)}$

$u_n = u_{-n} \Rightarrow \hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$

u réelle et $u_n = u_{-n} \Rightarrow \hat{u}$ réelle et $\hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$

(Bouts de) démonstrations

$$\left(\delta^k * \delta^p\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_m^k \delta_{n-m}^p = \delta_{n-k-p} = \left(\delta^{k+p}\right)_n$$

$$\mathcal{F}\left(\delta^k * \delta^p\right) = \mathcal{F}\left(\delta^{k+p}\right) = \mathcal{F}\left(\delta^k\right)\mathcal{F}\left(\delta^k\right)$$

Soit, $\quad \forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad e_m(\nu) = e^{2i\pi\nu m}.$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e_m(\nu)\overline{e_n(\nu)}d\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\nu(m-n)}d\nu \ =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[2\pi\nu(m-n)]\, d\nu + i\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin[2\pi\nu(m-n)]\, d\nu$$

$$= \delta_{m-n}$$

(Bouts de) démonstrations

$$\mathcal{F}(\phi.u)(\nu) = \sum_n u_n e^{2i\pi\nu_0 n} e^{-2i\pi\nu n} = \hat{u}(\nu - \nu_0)$$

$$\mathcal{F}(u^m) = \mathcal{F}(u * \delta^m) = \hat{u}\psi$$

$$u \text{ réelle} \Rightarrow \overline{\hat{u}(\nu)} = \overline{\sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m e^{-2i\pi n\nu m}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m e^{2i\pi n\nu m} = \hat{u}(-\nu)$$

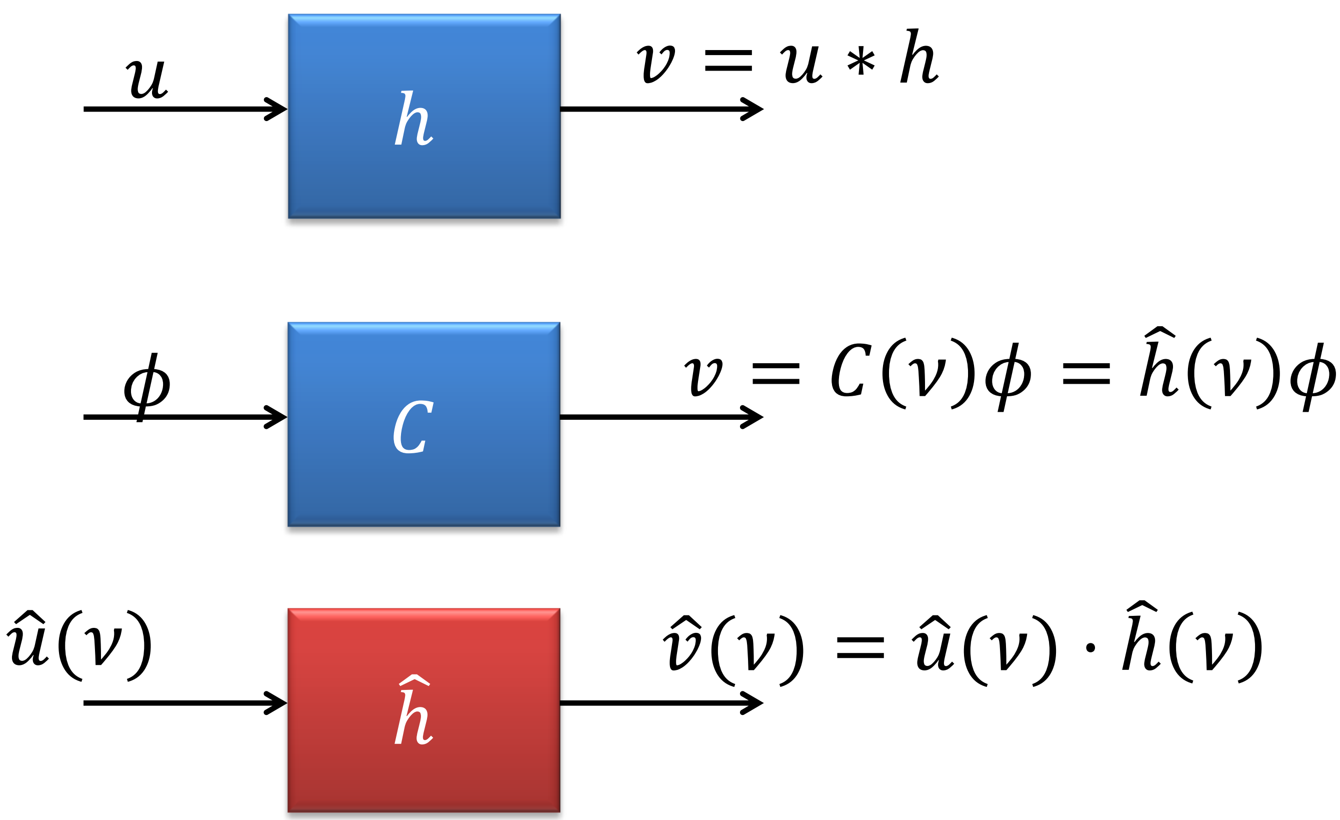
$$u_{-n} = u_n \Rightarrow \hat{u}(-\nu) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m e^{2i\pi n\nu m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi n\nu n} = \hat{u}(\nu)$$

Interprétation en termes de SLI

- Si $h \in l^1$, le SLI T associé transforme une suite bornée en une suite bornée
- Si $u \in l^1$ et $u = T[u]$, alors $v = h * v \in l^1$
- $C(\nu) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m e^{-2i\pi\nu m} = \hat{h}(\nu)$

- $\hat{v} = \hat{u}\hat{h}$

Interprétation en termes de SLI



Extension à l^2 et égalité de Parseval

- On peut étendre de l^1 à l^2 la définition de TFtD
- On garde la même notation : $\mathcal{F}[u] = \hat{u}(\nu)$
- Nous considérons $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$, espace des fonctions périodiques à énergie finie :

$$f \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right) \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Extension à l^2 et égalité de Parseval

Théorème

- On considère une application linéaire $\mathcal{F}: l^2 \to L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$ telle que la restriction de $\mathcal{F}$ sur l^1 est la TFtD
- Alors :
  - $\mathcal{F}$ existe et est unique
  - $\mathcal{F}$ est une bijection entre l^2 et $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$
  - $\mathcal{F}$ est une isométrie (égalité de Parseval) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{u}(\nu)|^2 d\nu$$

Extension à l^2 et égalité de Parseval

- Nous ne faisons pas la démonstration de l'existence et unicité

$\forall u \in l^2, \forall N \in \mathbb{N}$ on considère la suite de fonctions

$$\hat{u}_N(\nu) = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{-2i\,\pi\nu n}$$

On peut montrer la convergence à un élément de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$

Extension à l^2 et égalité de Parseval

Démonstration uniquement pour suites à support fini

Soit $e_m(\nu) = \exp(2i\pi\nu m)$

On a vu que $\int_{-1/2}^{1/2} e_m\, \bar{e}_n d\nu = \delta_{n-m}$

$$\|\hat{u}\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{u}(\nu)\overline{\hat{u}(\nu)} d\nu =$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Sigma_m u_m e_{-m} \Sigma_n \overline{u_n} e_n d\nu = \Sigma_{n,m} u_m \bar{u}_n \delta_{n-m}$$

$$= \|u\|_2^2$$

Quelques propriétés

$u, v \in l^2; \nu_0 \in [-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}[;$

$\phi: n \in \mathbb{Z} \to e^{2i\pi\nu_0 n}, \qquad \psi: \nu \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\to e^{-2i\pi m\nu}$

$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\hat{v}$ À condition que v soit sommable

$\mathcal{F}(uv) = \hat{u} * \hat{v}$

$[\mathcal{F}(\phi.u)](\nu) = \hat{u}(\nu - \nu_0)$

$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}.\psi$

u réelle $\Rightarrow \hat{u}(-\nu) = \overline{\hat{u}(\nu)}$

$u_n = u_{-n} \Rightarrow \hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$

u réelle et $u_n = u_{-n} \Rightarrow \hat{u}$ réelle et $\hat{u}(-\nu) = \hat{u}(\nu)$

Théorème d’inversion

Si $u \in l^2$et û $= F(u)$,
Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\nu) e^{2i\pi\nu n} d\nu$$

Dém. pour suite à support fini.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\nu) e^{2i\pi\nu n} d\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m \, e^{-2i\pi\nu m} e^{2i\pi\nu n} d\nu$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu m} e^{2i\pi\nu n} d\nu = u_n$$

Décroissance à l'infini et régularité

Soit $k \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |u_n| < +\infty$$

Alors $\hat{u} = \mathcal{F}[u]$ existe et $\hat{u} \in \mathcal{C}^k\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$, c.-à-d.

$\hat{u}$ est k fois continument dérivable.

Si on note v_n^k la suite de terme général

$$v_n^k = (-2i\pi n)^k u_n$$

Alors $v \in l^1$ et

$$\mathcal{F}[v^k](\nu) = \frac{\partial^k \hat{u}(\nu)}{\partial \nu^k}$$