Transformé de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La TFD d'un signal fini (SF) défini sur $\{0, \dots, N-1\}$ est encore un SF défini sur $\{0, \dots, N-1\}$ par :

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi\frac{k}{N}n}$$

On indexe $\hat{u}$ par k, mais la fréquence des ondes correspondantes est k/N

Théorème d’inversion

La formule d’inversion est :

$$u_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$$

Démonstration :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{-2i\pi\frac{k}{N}m}\ \ e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m \sum_{k=0}^{N-1} z^k$$

Avec $z = e^{2i\pi\frac{n-m}{N}}$

Théorème d'inversion

Avec $z = e^{2i\pi\frac{n-m}{N}}$. On trouve donc facilement :

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = N\delta_{n-m} \qquad \forall n, m, \in \{0,1, \dots, N-1\}$$

En remplaçant dans l'équation précédente on trouve :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} (u_m N\delta_{n-m}) \quad = u_n$$

En outre termes, les $\frac{\widehat{u}(k)}{N}$ sont les coefficients de la décomposition sur une base de Fourier

Propriétés classiques

$$u = \delta^m \Rightarrow \hat{u}_k = e^{-2i\,\pi\frac{m}{N}k}$$

$$\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\,\hat{v}$$

$$\mathcal{F}(uv) = \frac{1}{N}\hat{u} * \hat{v}$$

$$\mathcal{F}(\phi u) = \hat{u}(k - k_0) \qquad \phi_n = e^{2i\,\pi\frac{k_0}{N}n}$$

$$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u}_k e^{-2i\,\pi\frac{m}{N}n}$$

Propriétés de symétrie

Convolution circulaire

Translation circulaire

“Égalité” de Parseval

- Les ondes de Fourier sont orthogonales deux à deux et de norme $\sqrt{N}$ (voir démo invertibilité)
- On en déduit

$$\|\hat{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi\frac{k}{N}n} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{u}_m e^{2i\pi\frac{k}{N}m}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} u_n \bar{u}_m \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{k}{N}(n-m)} = N\|u\|^2$$

Liens entre TFD et TFtD

- La TFD est la seule transformée calculable sur ordinateur.
- Nous allons voir comment une TFD peut approximer une TFtD sous certaines hypothèses

Cas d'une suite à support fini

- On considere u définie sur $\mathbb{Z}$, et à support fini: $u_n = 0\ \forall n \notin \{0, \dots, N-1\}$.

- Soit v la restriction de u à $\{0, \dots, M-1\}$, avec $M \geq N$,

$$\hat{v}_k = \sum_{n=0}^{M-1} v_n e^{-2i\pi\frac{k}{M}n} = \hat{u}\left(\frac{k}{M}\right)$$

- Parfois $\hat{v}$ est nommée TFD d'ordre M de la partie non nulle de u (zero-padding)
- Donc avec un abus de langage, on peut parler de M-TFD d'une suite à support fini

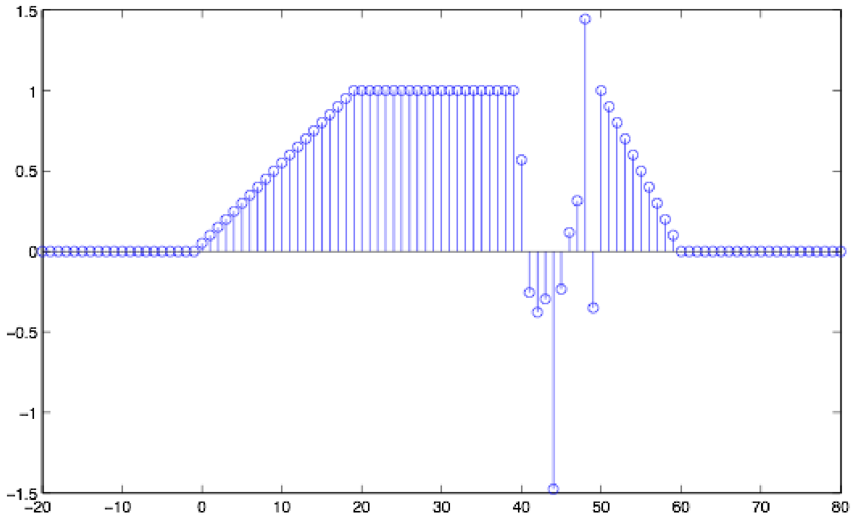
Cas d'une suite à support fini

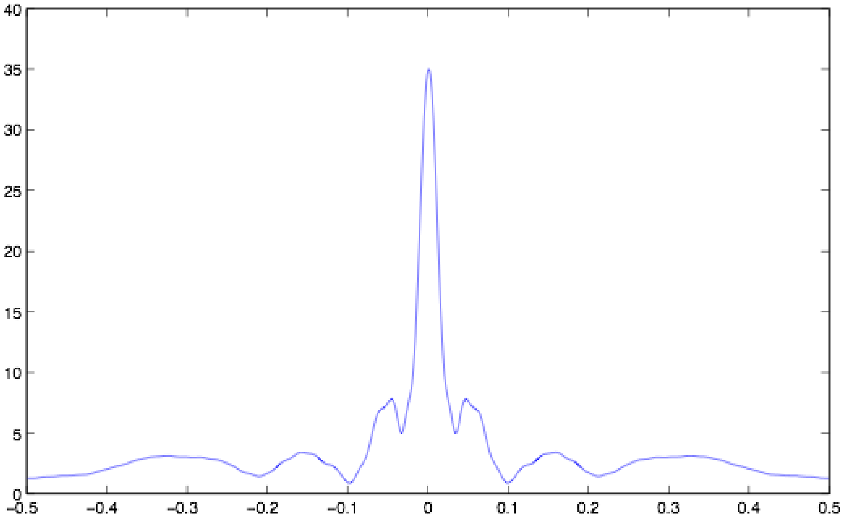
- En changeant M on peut échantillonner $\hat{u}(\nu)$ si finement qu'on le souhaite
- Cela revient à effectuer un *zero-padding*
- Toutefois, il suffit d'avoir N échantillons de $\hat{u}(\nu)$ pour connaitre parfaitement $\hat{u}$

$$\left\{\hat{u}\left(\frac{k}{N}\right)\right\}_{k\in\{0,\ldots,N-1\}} \xrightarrow[\text{TFD}-\text{I}]{} u \xrightarrow[\text{TFtD}]{} \hat{u}(\nu)$$

- Peut-on généraliser ? Quand est-ce que des échantillons pris avec pas $\frac{1}{N}$ permettent de reconstruire une fonction de variable réelle ?

Exemple

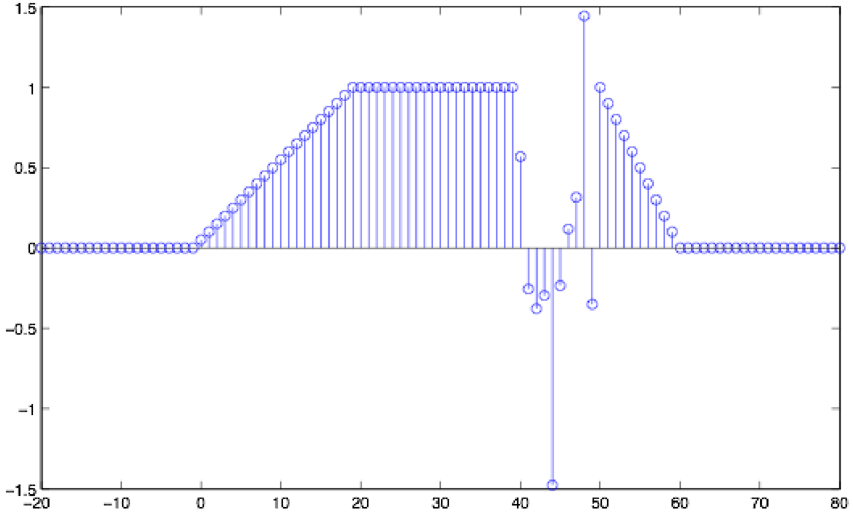


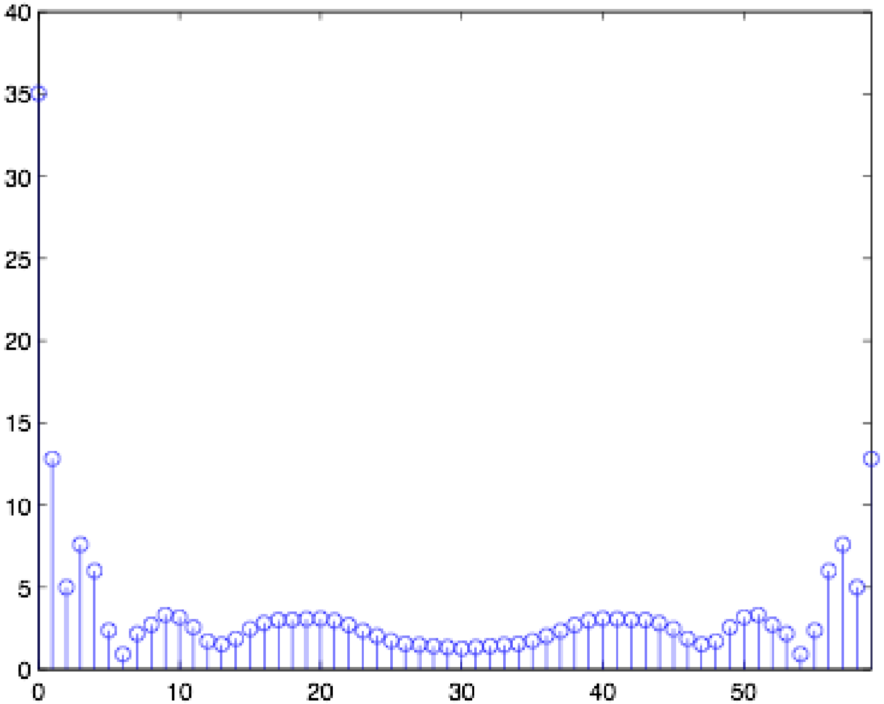


Un signal sur Z et sa TFtD (à droite)

Le support est {0, …, 59}

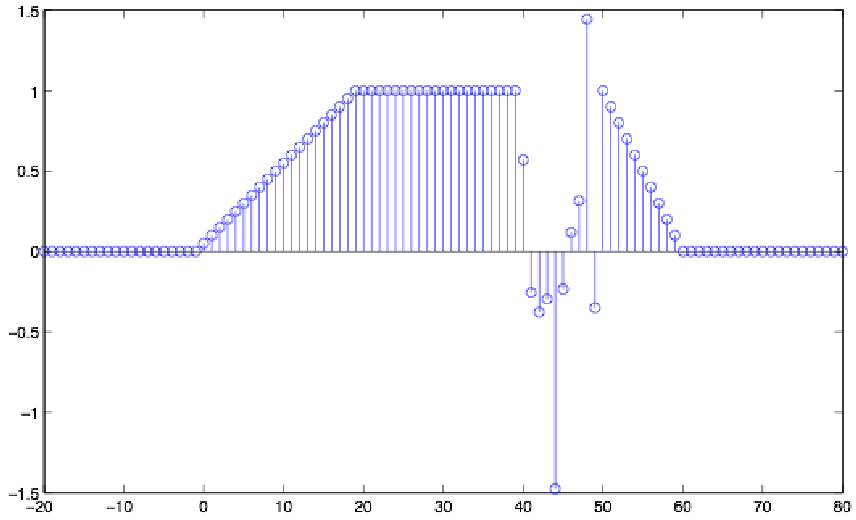
Exemple

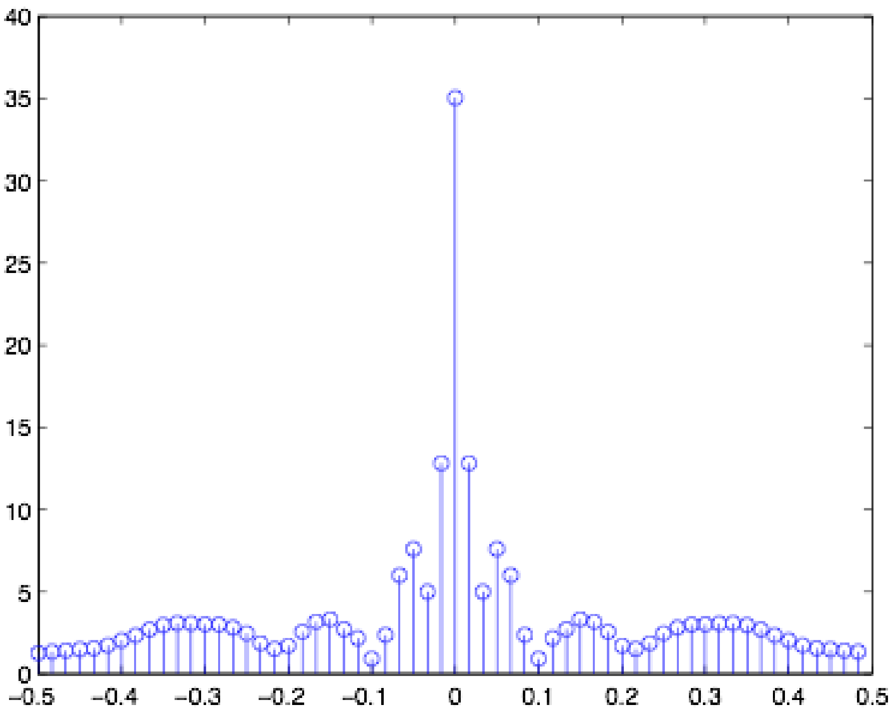




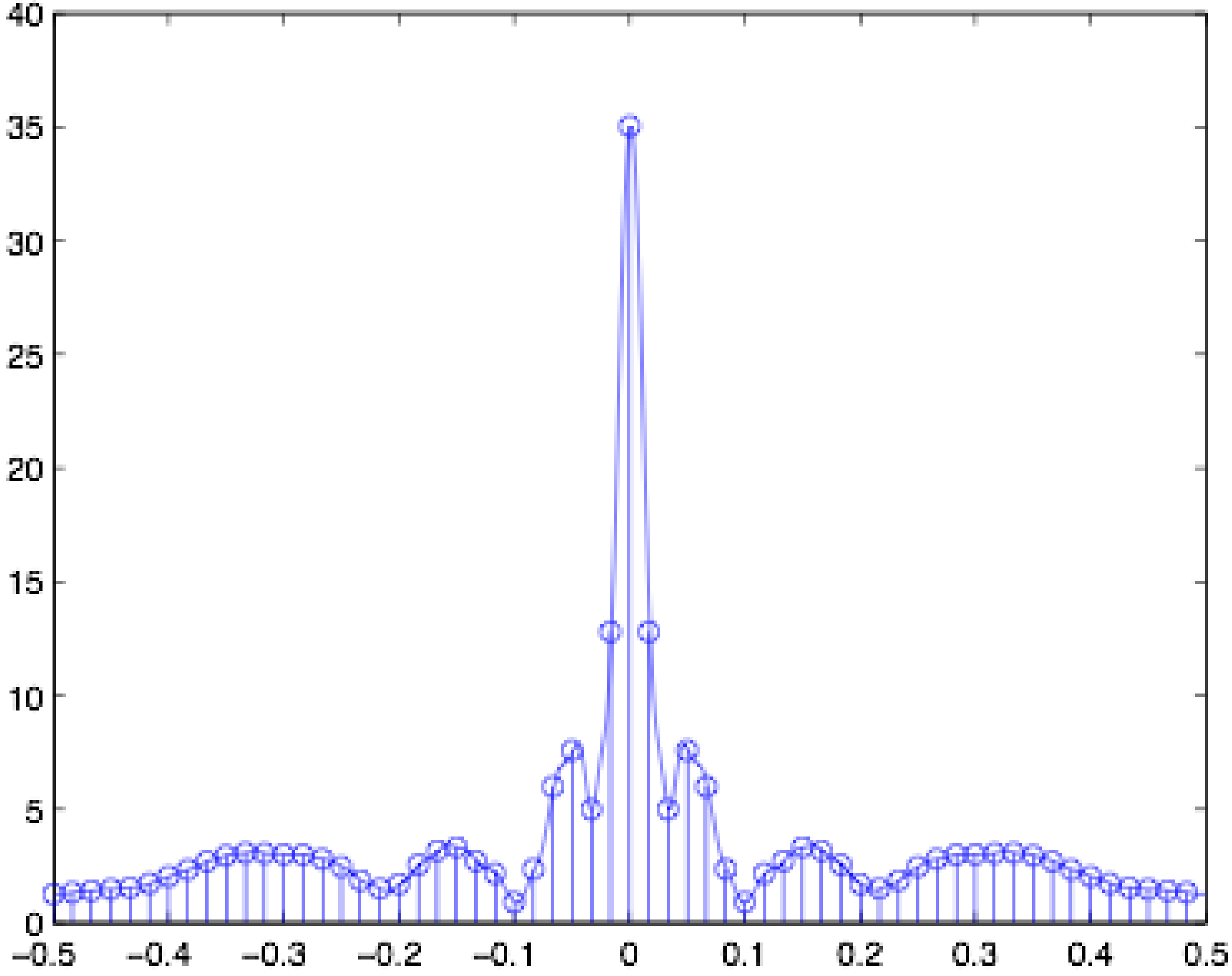
A droite: La TFD de taille 60
de la partie non nulle du signal.
Ici on a indexé par k.

Exemple





A droite on a indexé par k/M et périodisé de 1 pour revenir dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$



Superposition de TFD et TFtD. Des que $M \geq N$ la TFD est un échantillonnage *parfait* de la TFtD

Détermination de la fréquence d'une onde

- On observe N échantillons d'une onde.
- On veut à partir de ces échantillons, trouver la fréquence de l'onde.

Détermination de la fréquence d'une onde

$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = e^{2i\pi\nu_0 n}$ c-à-d., $u = \phi$, OF à fréq ν_0

On peut observer seulement un nombre fini d'échantillon : on a

$$u^T = \phi w$$

Ou w est une suite à support fini $\{0, \dots, N-1\}$

Par exemple, w est le créneau :

$$w_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in \{0, \dots N-1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Détermination de la fréquence d'une onde

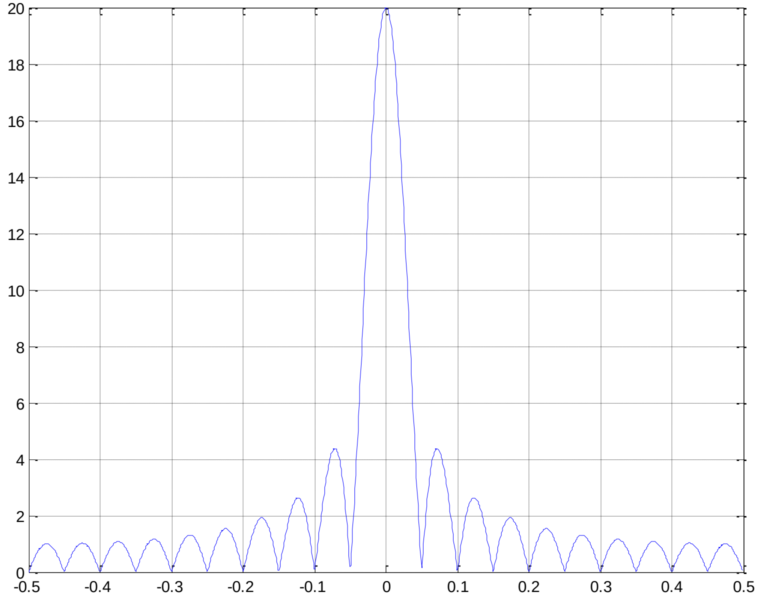
- Calculons la TFtD de u^T

$$\mathcal{F}(u^T) = \mathcal{F}(\phi w)$$
$$= \hat{w}(\nu - \nu_0)$$

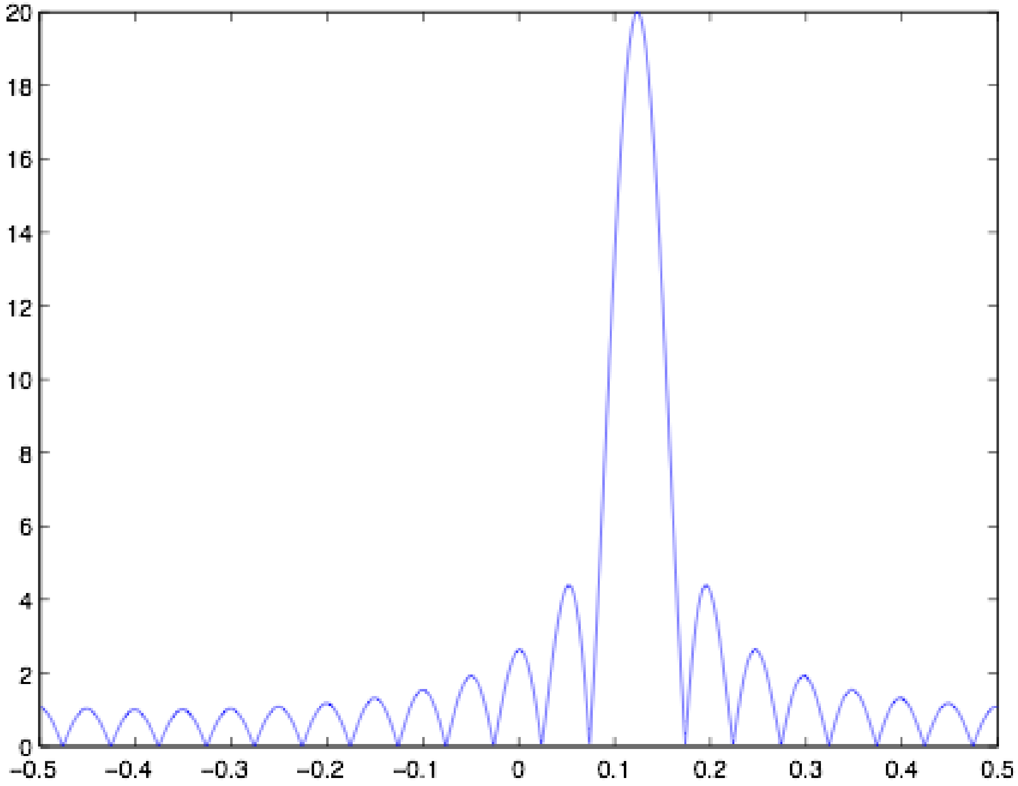
On trouve facilement que

$$|\hat{w}(\nu)| = \frac{|\sin \pi N \nu|}{|\sin \pi \nu|}$$

Alors ν_0 est la position du pic de $\mathcal{F}(u^T)$



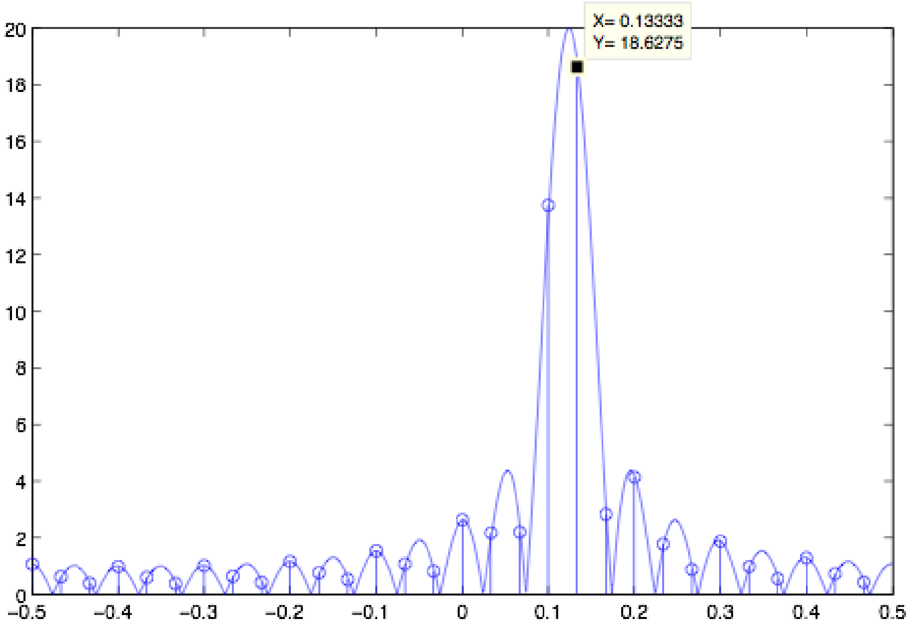
$|\hat{w}(\nu)|$ pour N=20

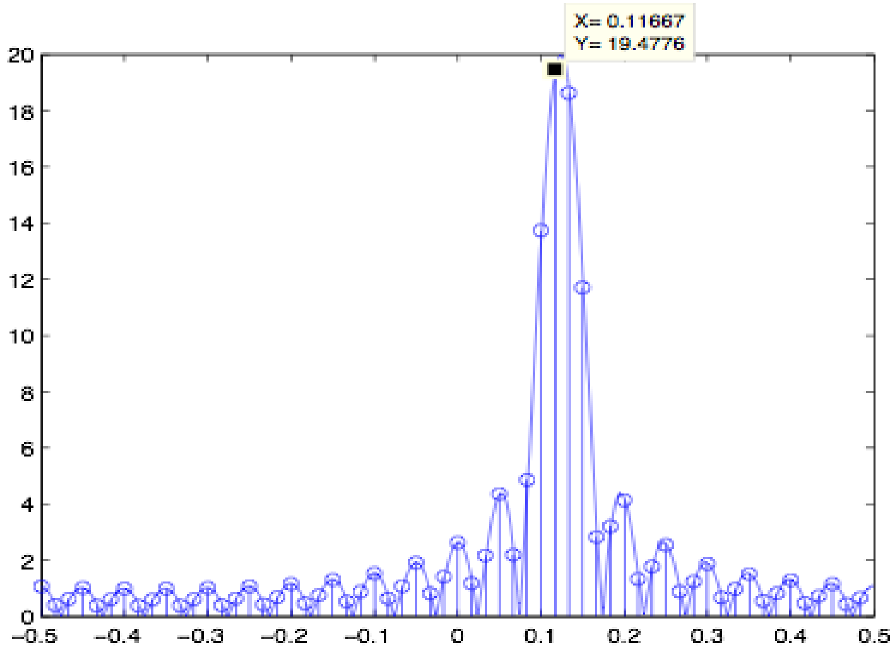


TFtD d’une onde de fréquence 0,123 tronquée à 20 échantillons.

Détermination de la fréquence d’une onde

- Problème : on n’a pas $\widehat{u^T}$, mais seulement ses échantillons de pas $1/M$
- La position du pic sera donc connue avec une précision liée à l’ordre de la TFD M et non à la durée d’observation N





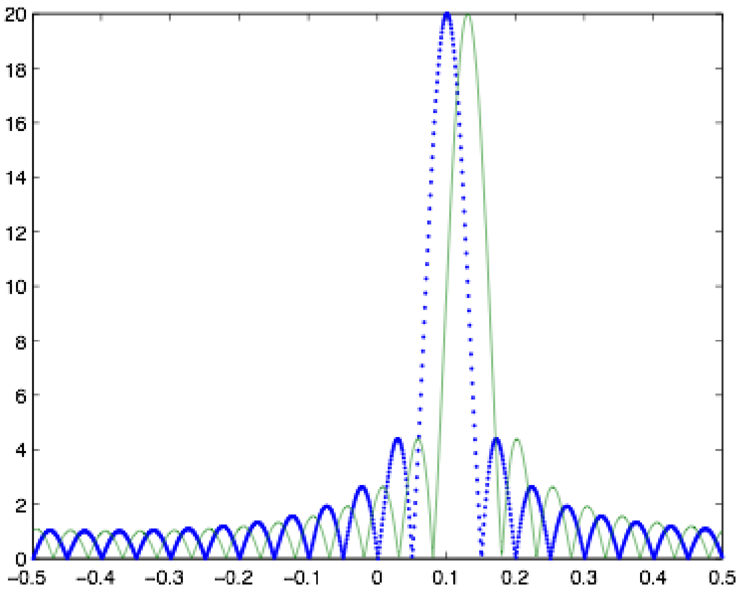
- TFD d’ordre 30 (gauche) et 60 (droite)
- La précision de la détermination de la fréquence est $1/M$
- On choisit le k pour lequel la TFD est maximale

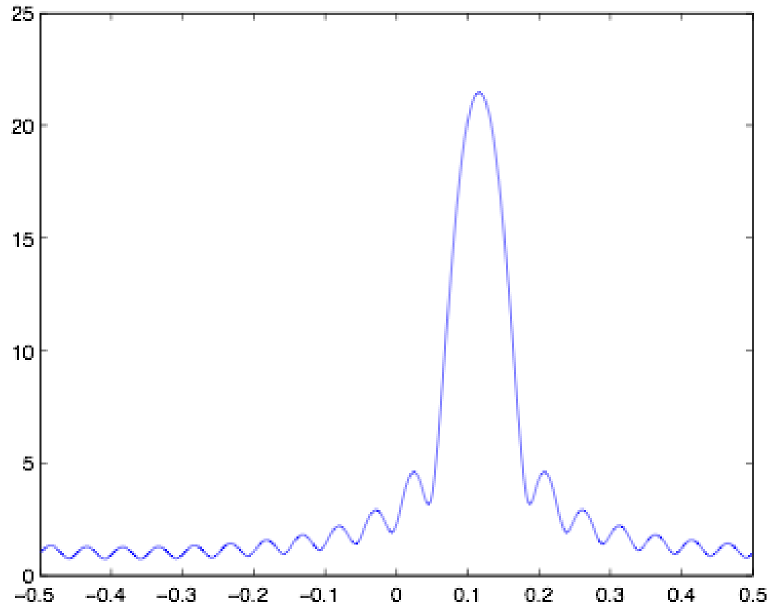
Séparation de deux ondes

- La durée de l'observation affecte la résolution en fréquence
- On considère un mélange deux ondes de Fourier, observé sur un nombre N d'échantillons:

$$u_n = A_0 e^{2i\pi\nu_0 n} + A_1 e^{2i\pi\nu_1 n}$$

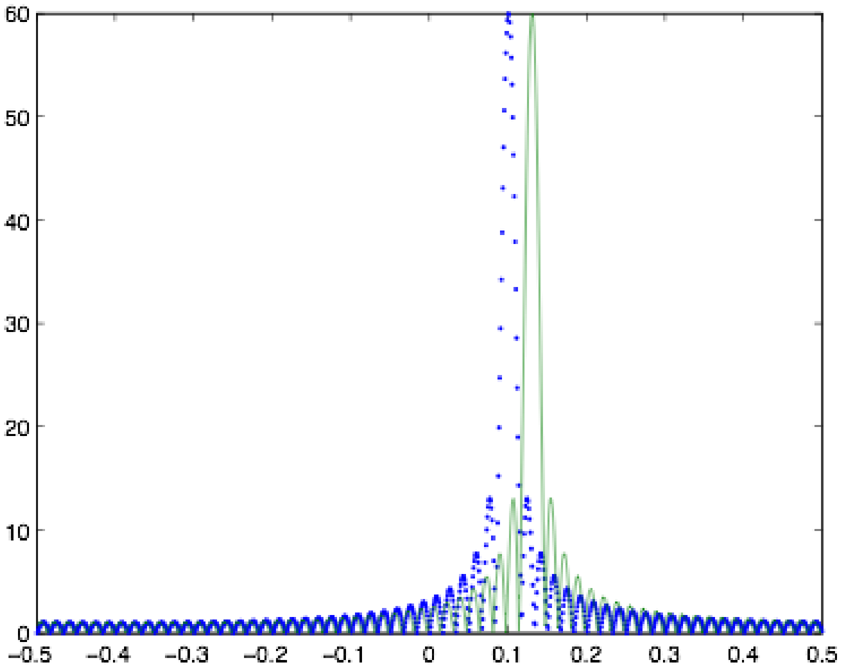
Résolution fréquentielle:

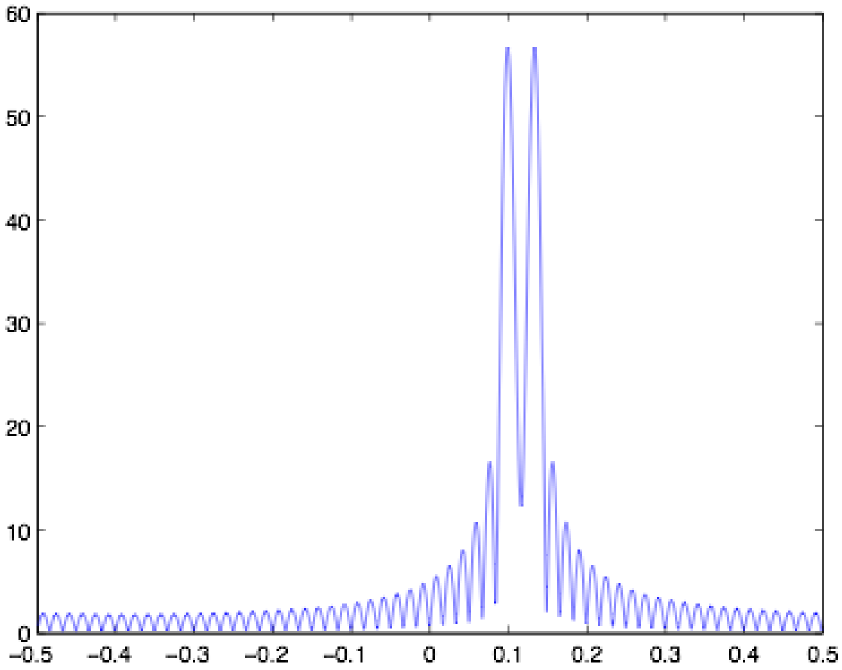




$N = 20$. A gauche les deux TFtD, à droite la somme. On ne peut pas distinguer les ondes de fréquences proches à moins de $1/N$ (ordre de grandeur)

Résolution fréquentielle:





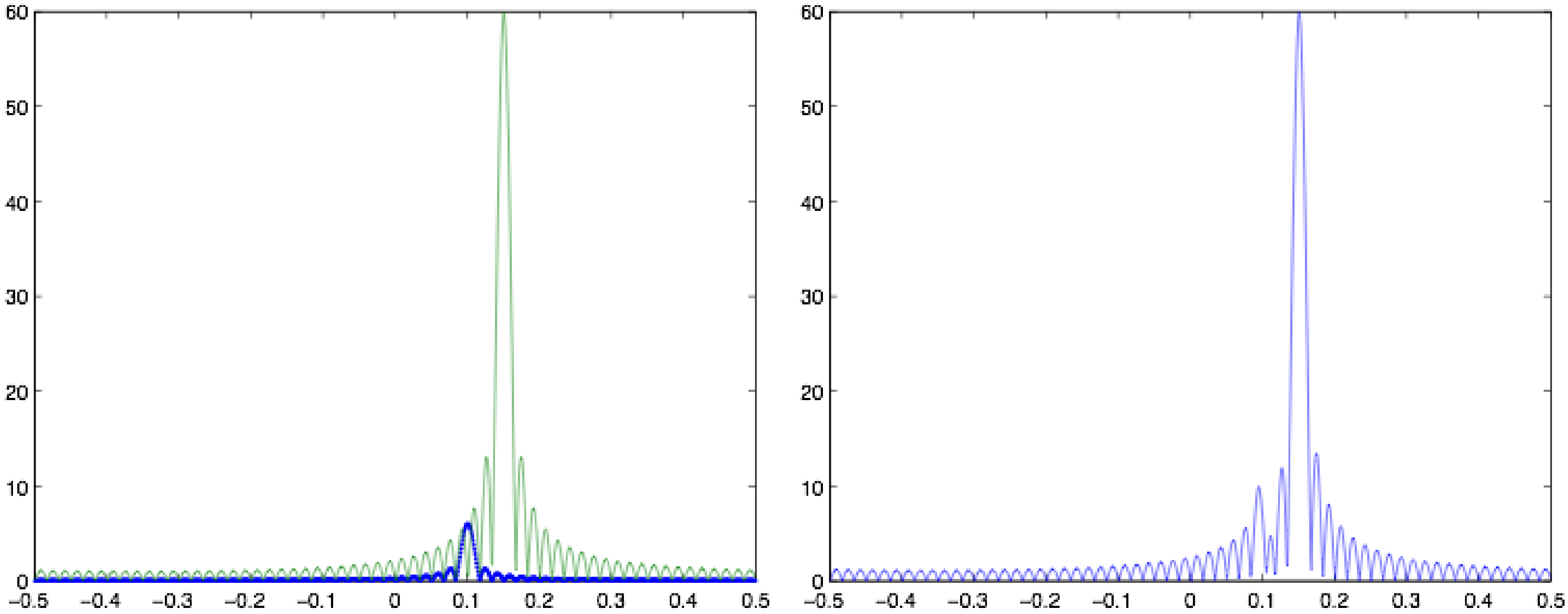
$N = 60$. On arrive maintenant à distinguer les deux ondes.

Résolution fréquentielle:

- La TFD du mélange de 2 ondes est :
$$A_0 w\left(\frac{k}{M} - \nu_0\right) + A_1 w\left(\frac{k}{M} - \nu_1\right)$$
  - Si $A_0 = A_1$, les pics sont séparables si leurs lobes sont séparés d'une demi-amplitude
  - L'amplitude du lobe dépend de la fenêtre : pour le créneaux est $\frac{1}{N}$
  - Alors la condition est: $N \geq \frac{1}{|\nu_0 - \nu_1|}$

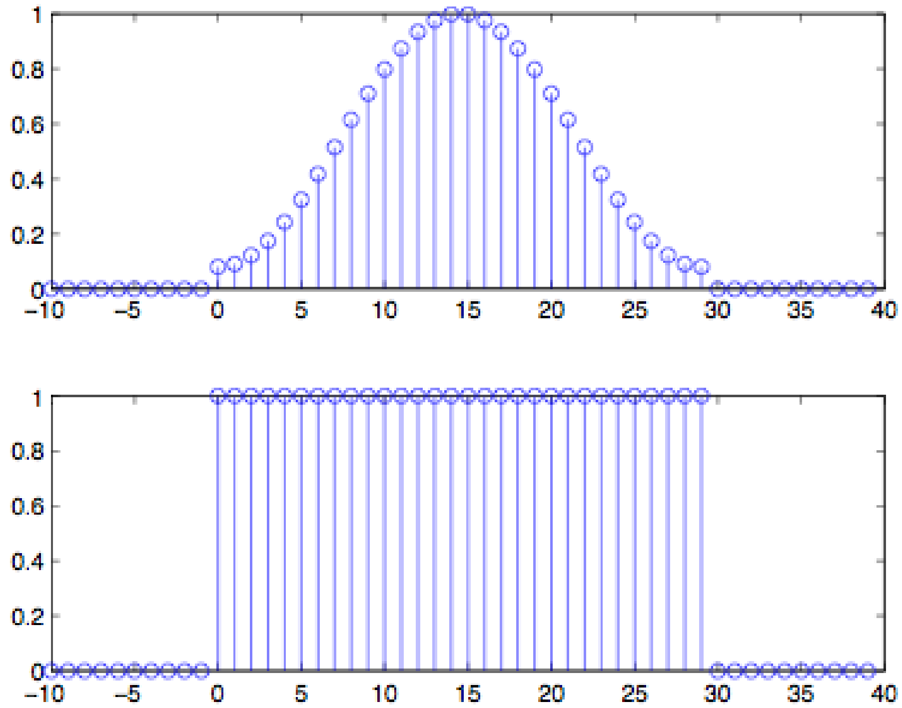
Problème des amplitudes très différentes, masquage et fenêtrage

- Pour remédier au problème de la résolution fréquentielle, il faut augmenter le nombre d'échantillons observés N, si possible.
- Ce ne dépende pas de l'ordre M de la TFD
  - Bien que on doive toujours avoir $M \geq N$
- Que se passe-t-il si les deux ondes ont des amplitudes très différentes?



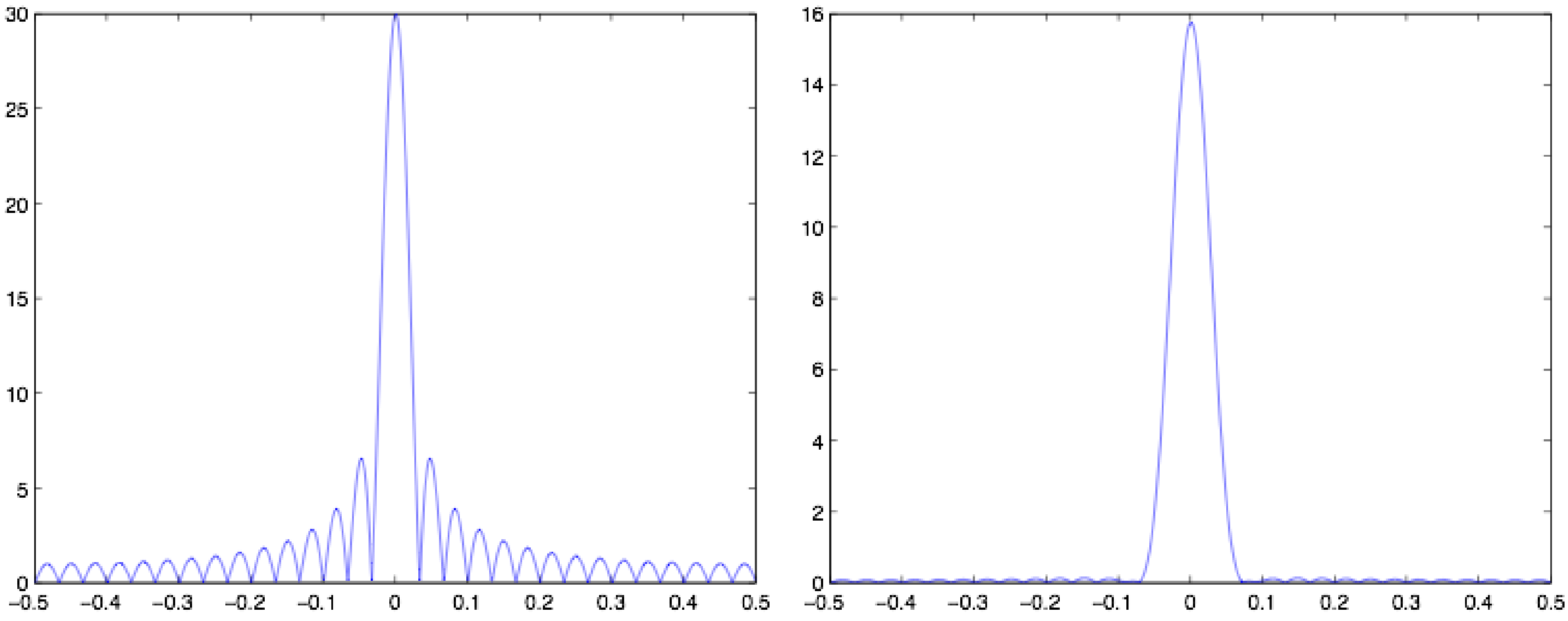
Gauche: TFtD des deux ondes.
Droite: TFtD de la somme.
Les pics secondaires masquent la 2ème onde

Le choix d'une fenêtre:

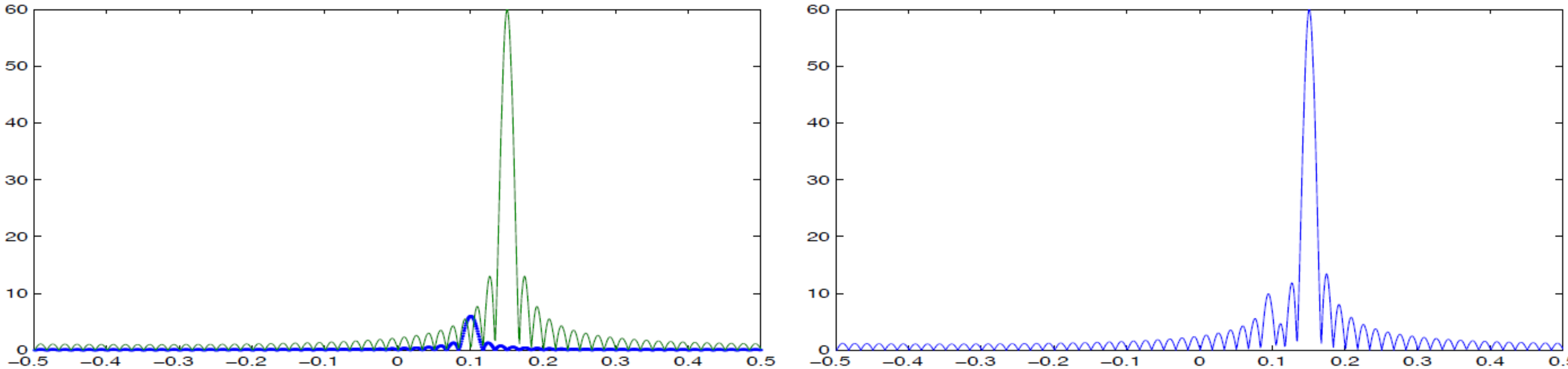


Haut: Fenêtre de Hamming. Bas: fenêtre créneau (taille 30 dans les deux cas).

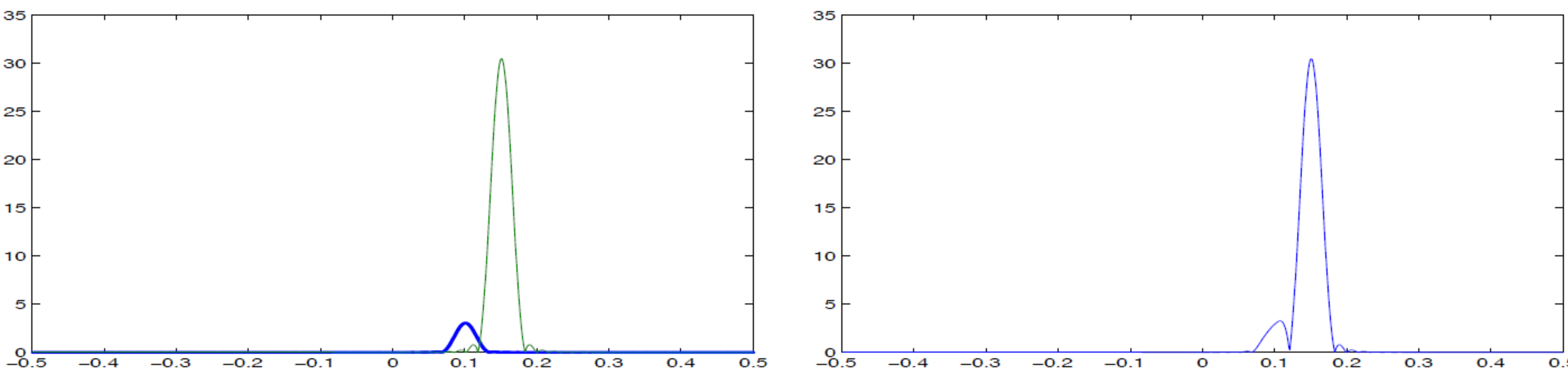
Le choix d'une fenêtre:



Gauche : TFtD d'un créneau de taille 30.
Droite : TFtD d'une fenêtre de Hamming.



Troncature brutale (multiplication par un créneau)



Multiplication par la fenêtre de Hamming

Analyse en fréquence : résumé

- Détermination de la fréquence d'une onde de Fourier : précision $= 1/M$
- Séparation de deux ondes de la même amplitude : $|\Delta\nu| \geq 1/N$
- Séparation de deux ondes d'amplitude très différente : en fonction du rapport entre amplitude du lobe principale et secondaire
  - Cela ne dépende pas de N (cf. TD 1) mais de la *forme* de la fenêtre

Le spectrogramme

- L'idée du spectrogramme est d'analyser localement le contenu fréquentiel d'un signal.
- Autour de chaque point du signal, on extrait une fenêtre dont on calcul la TFtD (par une TFD)
- Pour un signal u et une fenêtre w centrée en zéro :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \qquad U(n,\nu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu m}$$

En réalité en peut calculer uniquement les échantillons de $U(n,\nu)$ par TFD

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \{0, \dots M-1\}, \qquad U\left(n, \frac{k}{M}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\frac{k}{M}m}$$

Le spectrogramme

- Pour n (temps) fixé on a la formule
$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \qquad U(n,\nu) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu m}$$

- Elle signifie que $U(n,\nu)$ est la TFtD de u multipliée par la fenêtre w translatée de n : analyse en fréquence aux alentours de l'instant n

Le spectrogramme

- Pour une fréquence fixée on a la formule

$$U(n,\nu_0) = \sum_m u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu_0(n-m)} e^{-2i\pi\nu_0 n}$$

$$|U(n,\nu_0)| = \left| \sum_m u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu_0(n-m)} \right| = |< u, \psi^n >|$$

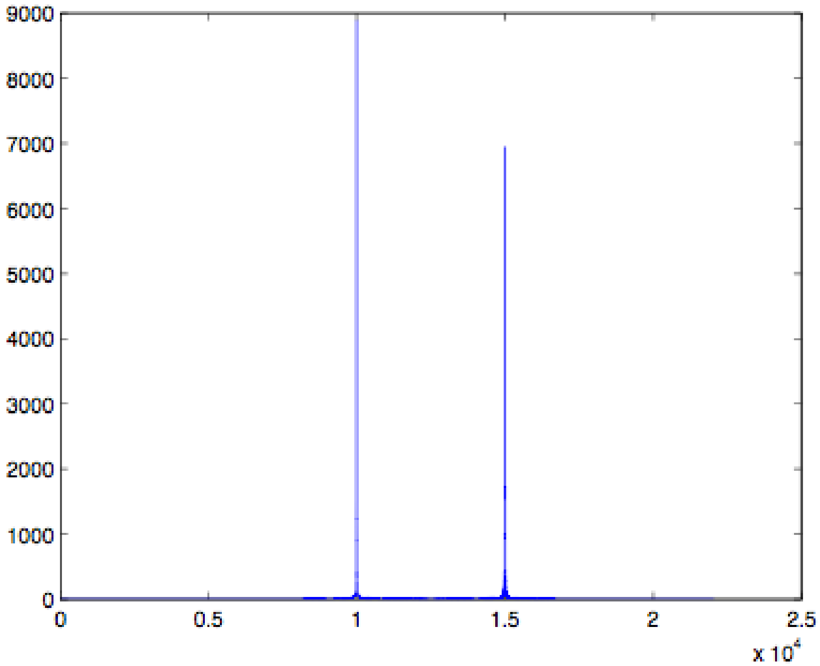
$$\psi = w\phi^{\nu_0}$$

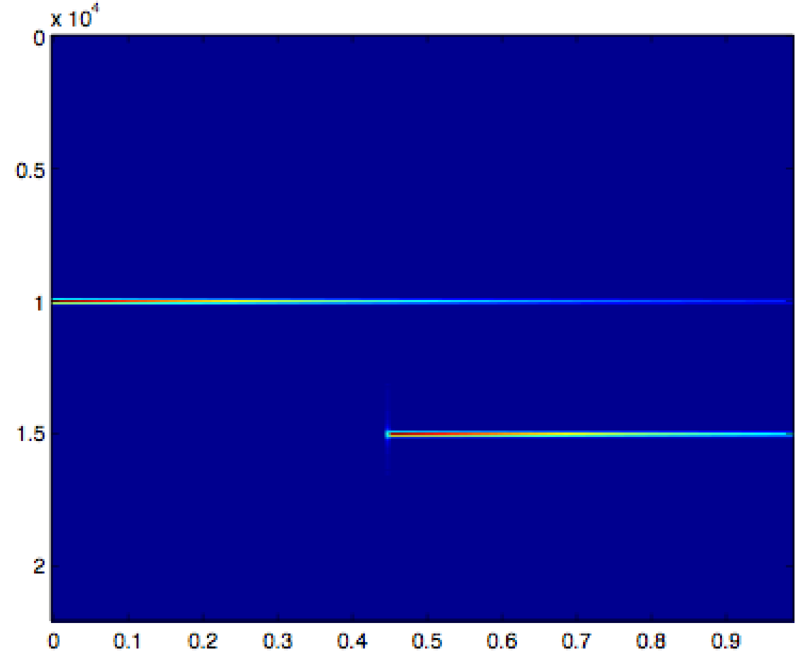
Produit scalaire entre u et ψ^n: similitude entre u et une « onde » tronquée (autour de n) de fréquence ν_0

Affichage des spectrogrammes

- Comme on a affaire à des signaux réels, le module de la TFtD est symétrique.
- L'axe du temps est l'axe des x et l'axe des y est l'axe des fréquences (ici en Hz)
- On utilise une échelle logarithmique pour le module, sinon, certaines fréquences domineraient trop (c'est d'ailleurs l'échelle de sensibilité de l'oreille)

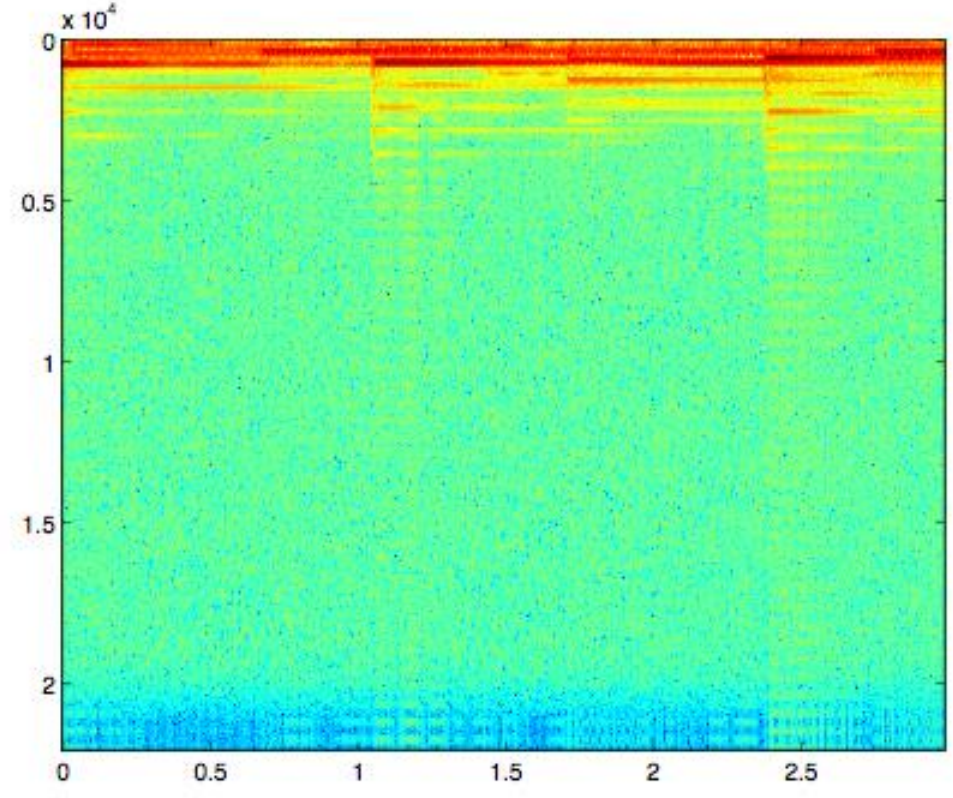
Exemple





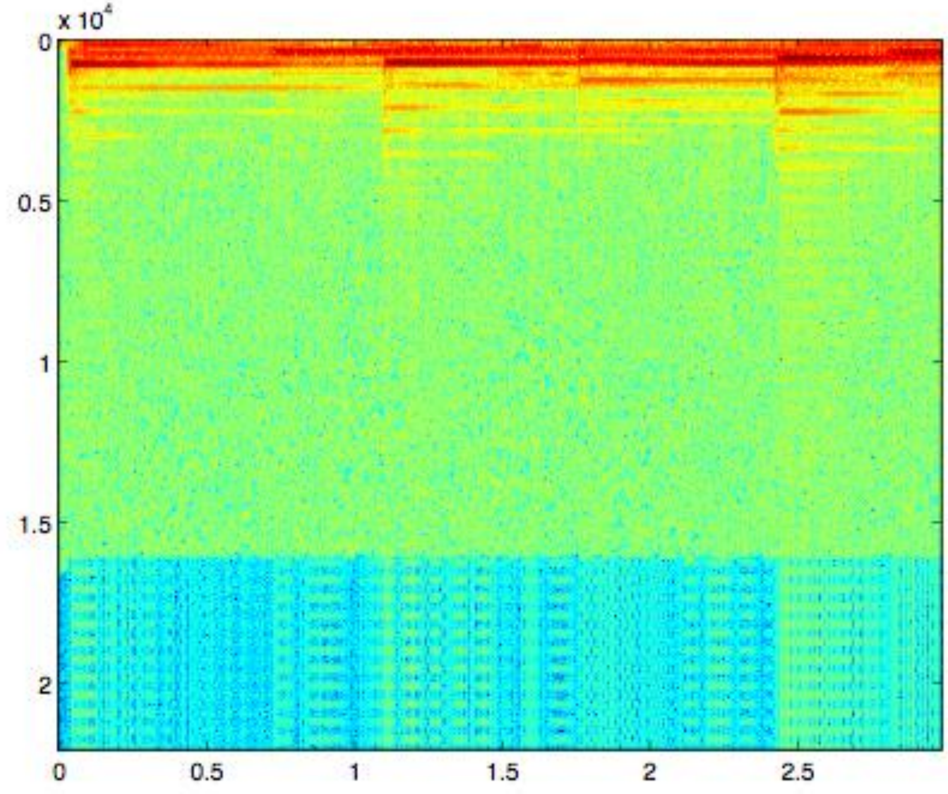
TFtD (gauche) et spectrogramme (droite) du même signal.
La TFtD ne permet pas de savoir à quel moment arrive l’onde à 15000Hz.

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme



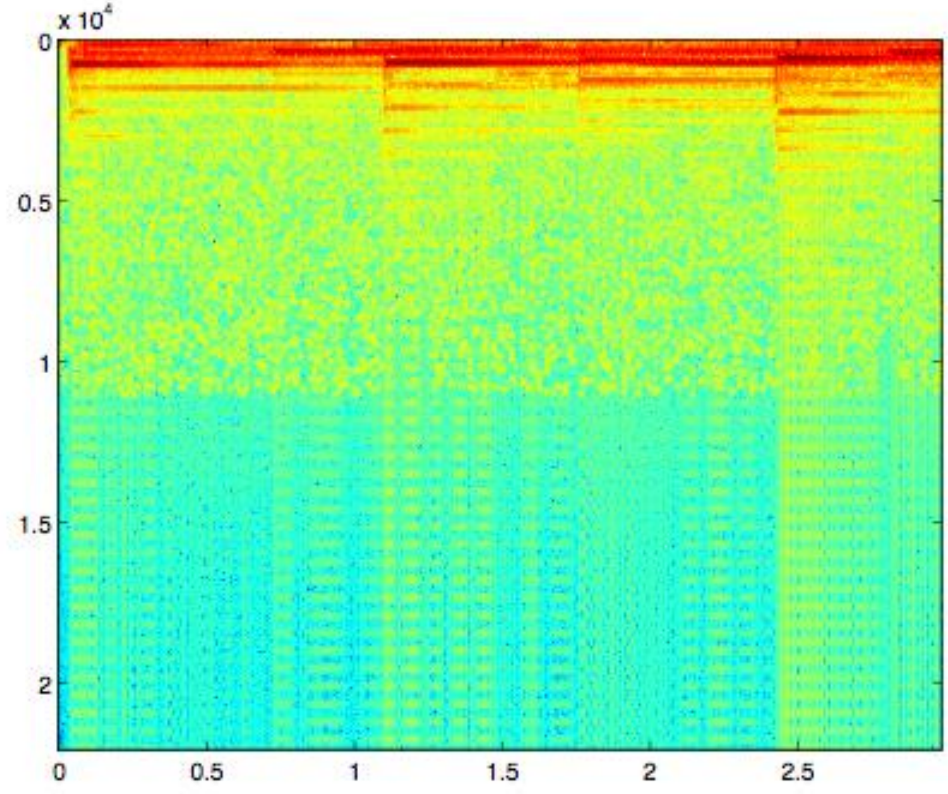
Piano: Original

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme



MP3: 128kbits/s

Observation du codage mp3 sur le spectrogramme



MP3: 64kbits/s. Tout a diparu au-delà de 10000Hz.
Cependant le codage MP3 n'est pas un simple passe bas.