Transformée en Z

Vocabulaire

- RI pour réponse impulsionnelle
- Suite causale: h_n **nul** pour $n < 0$
- SLI causal si sa RI l'est
- Suite anti-causale: h_n **nul** pour $n \geq 0$
- SLI anti-causal si sa RI l'est
- Bilatère: ni causal ni anti-causal
- RIF: RI finie (support fini)
- RII: RI à support infini

Propriétés de la causalité

- Un SLI causal ne dépend que du passé de son entrée.
- La convolution de deux suites causales est causale.
- Et donc, la composition de deux SLI causaux est un SLI causal

$(u * v)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m v_{n-m} = \sum_{m\geq 0} u_m v_{n-m}$, nul si $n < 0$

- Tout système physique réaliste est causal
  - Mais si n n'est pas une variable temporel ou si le traitement ne doit pas se faire en temps réel, les systèmes non causaux sont tout à fait envisageables !

Transformée en Z (TZ)

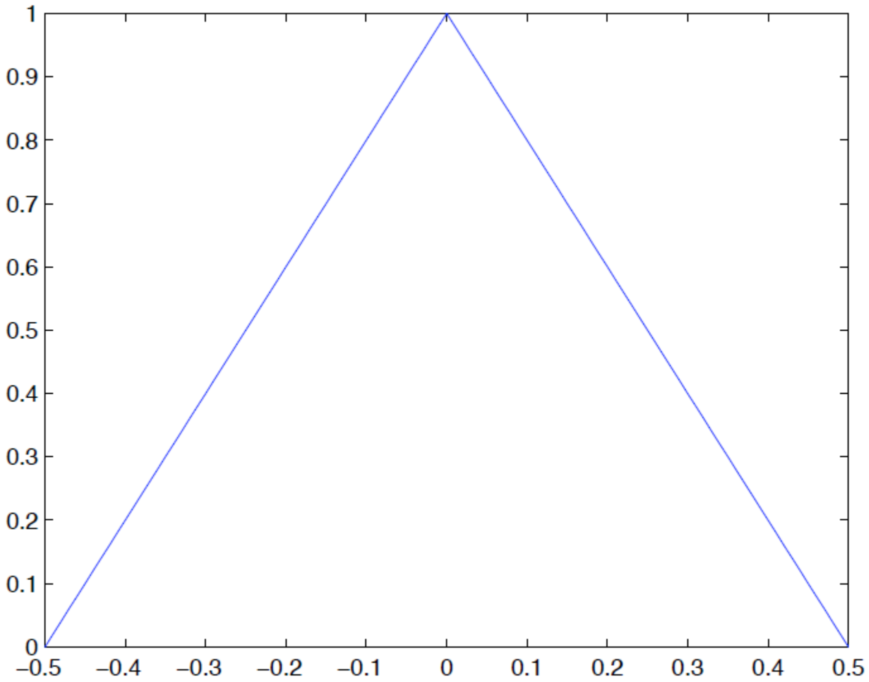
Si $h \in l^1$, on définit sa TZ (notée $H(z)$) par:

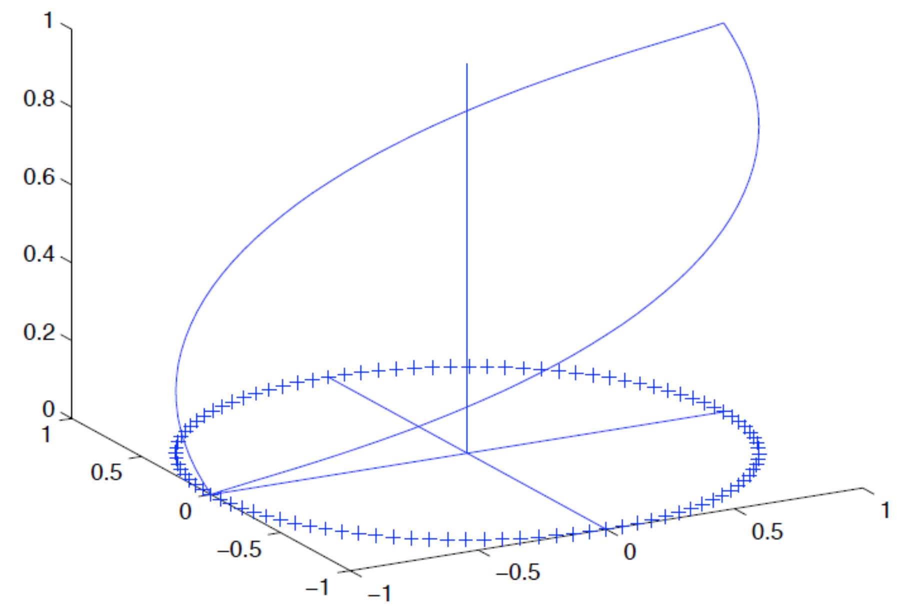
$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \mathcal{Z}[h](z) = H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}$$

Avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (Cercle unité)

On observe que $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \hat{h}(\nu) = H(z)|_{z=e^{2i\pi\nu}}$

Ou encore $\forall z \in \mathbb{U}, H(z) = \hat{h}\left(\frac{\ln z}{2i\pi}\right)$





TFtD et TZ d'une même suite. On a une illustration graphique du caractère périodique des fréquences sur Z ([-1/2,1/2[)

Propriétés de la TZ

Grâce à la relation entre TZ et TFtD, on trouve facilement les propriétés de la TZ

Convolution : Si $u, h \in l^1$, on sait que $v = u * h \in l^1$ et on a:

$$V(z) = U(z)H(z)$$

Inversion : Si $u \in l^1$ et $U(z)$ est sa TZ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u_n = \int_{-1/2}^{1/2} H\left(e^{2i\pi\nu}\right) e^{2i\pi\nu} \mathrm{d}\nu$$

En conséquence, la TZ est injective

Propriétés de la TZ

$$\forall u, v \in l^1, \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Retard :

$\forall z \in \mathbb{U},$

$$\mathcal{Z}[u^m](z) = \sum_{n \in Z} u_{n-m} z^{-n} = \sum_{k \in Z} u_k z^{-k-m} = z^{-m} U(z)$$

Linéarité :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \mathcal{Z}[\lambda_1 u + \lambda_2 v](z) = \lambda_1 U(z) + \lambda_2 V(z)$$

Exemples de TZ

- Si $h_n \neq 0 \Leftrightarrow n \in \{0,1,\dots,N\}$, alors sa TZ est un polynôme en z^{-1}:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h_n z^{-n} = P(z^{-1})$$

- $h_0 = 1, h_1 = -\frac{1}{2}, h_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}$$

- $h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si $n \geq 0$, et $h_n = 0$ ailleurs

Trouver $H(z)$

Exemples de TZ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

- Remarquer que les deux dernières suites sont les RI de SLI inverses l’un de l’autre...

Les filtres stables récursifs

- Un filtre numérique est un SLI sur $\mathbb{Z}$
- Un SLI est stable si $h \in l^1$ (Stabilité BIBO – *Bounded input, bounded output*)
- Un filtre (SLI) stable est **récursif** si

1. la relation entrée/sortie peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad & b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ \dots + b_q y_{n-q} \\ = \quad & a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ \dots + a_p x_{n-p} \end{aligned}$$

2. Les polynômes $P(z) = \sum_i a_i z^i$ et $Q(z) = \sum_i b_i z^i$ sont co-premiers

Les filtres stables récursifs

- Permettent **d'implémenter** une classe de filtres plus large des RIF *avec un nombre fini d'opérations*
- **Exactement** si l'entrée est causale
  - Mais tout signal acquis est causale, quitte à le retarder
- Avec **précision arbitraire** sinon

TZ de la RI d’un filtre récursif stable

- Si H est la TZ de la RI d’un filtre récursif stable alors (avec les notations précédentes)

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

- Ceci implique que le polynôme Q ne s’annule pas sur le cercle unité.

Décroissance exponentielle de la décomposition d'une fraction rationnelle

Si P et Q sont deux polynômes co-premiers et Q ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$, alors il existe une suite h et des réels positifs R_1, R_2, C_1, C_2 tels que:

$$
\begin{aligned}
&0 < R_1 < 1 < R_2 \\
&\forall n \geq 0, \qquad |h_n| < C_1 R_1^n, \text{et } |h_{-n}| < C_2 R_2^{-n} \\
&\forall z \in \mathbb{C}: R_1 < |z| < R_2, \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}
\end{aligned}
$$

En plus, $h \in l^1$ et $\forall z \in \mathbb{U}, H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$

Sans démonstration

Deux décompositions importantes

Soit $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$.

Si $\alpha \in \mathbb{C}: |\alpha| < 1$, alors

$$\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \sum_{n\geq 0} \alpha^n z^{-n}$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}: |\alpha| > 1$, alors

$\forall z \in \mathbb{U}$,

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{-\alpha^{-1} z}{-\alpha^{-1} z + 1} = -\sum_{n>0} \alpha^{-n} z^n = -\sum_{m<0} \alpha^m z^{-m}$$

Si α est à l'intérieur [extérieur] du disque unitaire, $H(z)$ est la TZ d'une suite [anti-]causale

Une équation de récurrence n'a qu'une seule solution sommable

- Si on se donne une équation de récurrence telle que Q n'a pas de zéros sur le cercle unité. Alors pour toute entrée sommable x, il existe une unique solution $y \in l^1$ tel que $y = x * h$, où h est la seule suite dont la TZ est P/Q.

- Ainsi, une équation de récurrence définit un SLI récursif stable (avec la condition sur Q).

Une équation de récurrence n'a qu'une seule solution sommable

Unicité. Soit y^1 et y^2 deux solutions associées à x :

$$\sum b_m (y^1)^m = \sum a_k x^k = \sum b_m (y^2)^m$$
$$\sum b_m z^{-m} Y^1(z) = Q(z^{-1}) Y^1(z) =$$
$$\sum b_m z^{-m} Y^2(z) = Q(z^{-1}) Y^2(z) \Rightarrow Y^1(z) = Y^2(z)$$

L'injectivité assure le résultat $y^1 = y^2$

Forme Le théorème précédent assure que si on définit $H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$, alors $\exists h \in l^1 : \mathcal{Z}[h](z) = H(Z)$

Soit donc $y = h * x$. On sait que $y \in l^1$, donc on en peut calculer la TZ

Une équation de récurrence n'a qu'une seule solution sommable

$$y = h * x \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} X(z)$$

$$Q(z^{-1})Y(z) = P(z^{-1})X(z)$$

$$\sum_m b_m z^{-m} Y(z) = \sum_k a_k z^{-k} X(z) \xrightarrow[\mathrm{TZ-I}]{}$$

$$\sum_m b_m y_{n-m} = \sum_k a_k x_{n-k} \Rightarrow$$

y est une (la) solution

Simplification d'une équation de récurrence

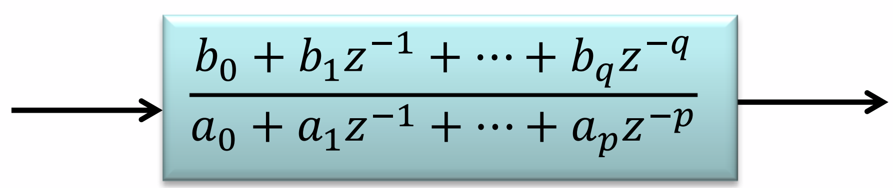
- On se donne une équation de récurrence (non triviale)

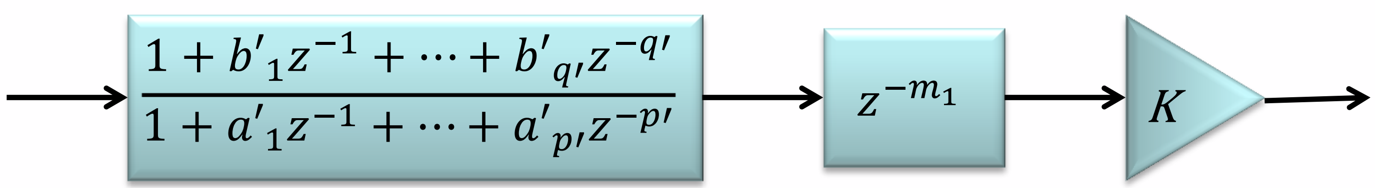
$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ \dots + b_q y_{n-q} \quad = \quad a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ \dots + a_p x_{n-p}$$

- Quitte à décaler x et y, on peut toujours supposer que $b_0 = 1$ et a_0 non nul.

- On peut aussi remplacer a_i par a_i / a_0 et dire que le nouveau $a_0 = 1$: c'est équivalent à multiplier y par une constante

- Nous ferons ces hypothèses pour simplifier la présentation.





Pôles et zéros

- On se donne un SLI stable récursif d'équation de récurrence (a_0 et b_0 non nuls)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ \ldots + b_q y_{n-q} = a_0\, x_n + a_1 x_{n-1} + \ \ldots + a_p x_{n-p}$$

- Les zéros du filtre sont les zéros de $P(z^{-1})$

- Les pôles du filtre sont les zéros de $Q(z^{-1})$

Rem: Ce sont les inverses des zéros de de P et Q.

Ce sont aussi les zéros et les pôles de $H(z)$

Pôles et zéros : exemples

$$y_n = x_n + \frac{1}{2} x_{n-1}$$
$$H(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1}$$

Pôles : aucun ;
zéros : $\mathrm{z}_0 = -\frac{1}{2}$

$$y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = x_n$$
$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Pôles : $\rho_0 = -\frac{1}{2}$;
zéros : aucun

$$y_n + \frac{1}{3} y_{n-1} = x_n - \frac{1}{4} x_{n-2}$$
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}$$

Pôles : $\rho_0 = -\frac{1}{3}$;
zéros : $z_0 = \frac{1}{2},\ z_1 = -\frac{1}{2}$

Interprétation du module de la TZ rationnelle

$$a_0 = 1, b_0 = 1, \qquad H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

$$P(t) = \sum a_i t^i, \mathrm{Q}(t) = \sum b_i t^i$$

Alors $|H(z)| = \frac{\prod_i MA_i}{\prod_j MB_j}$

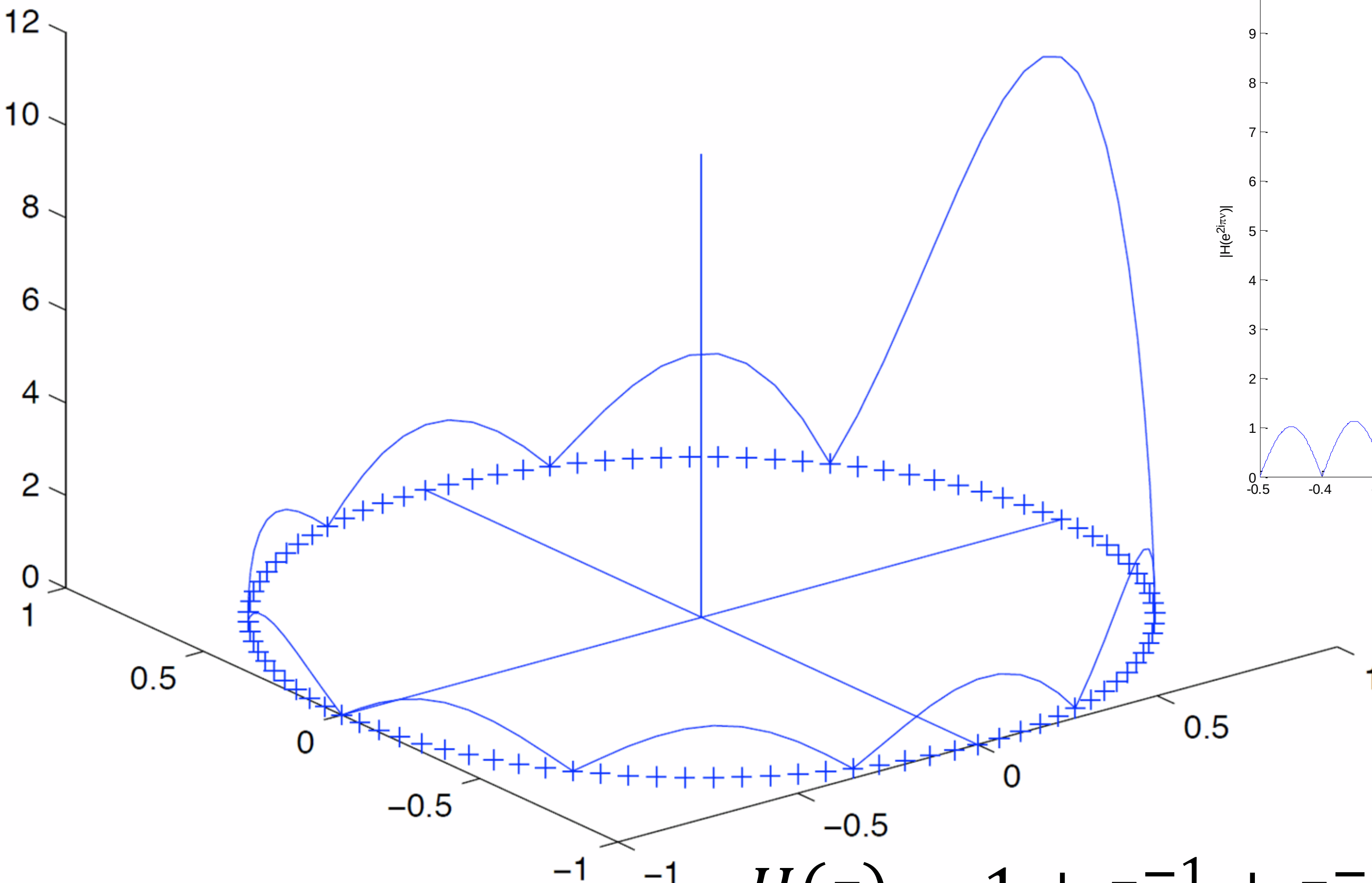
Où M est le point d'affixe z, et A_i, B_j sont les points d'affixes les zéros [pôles] du filtre

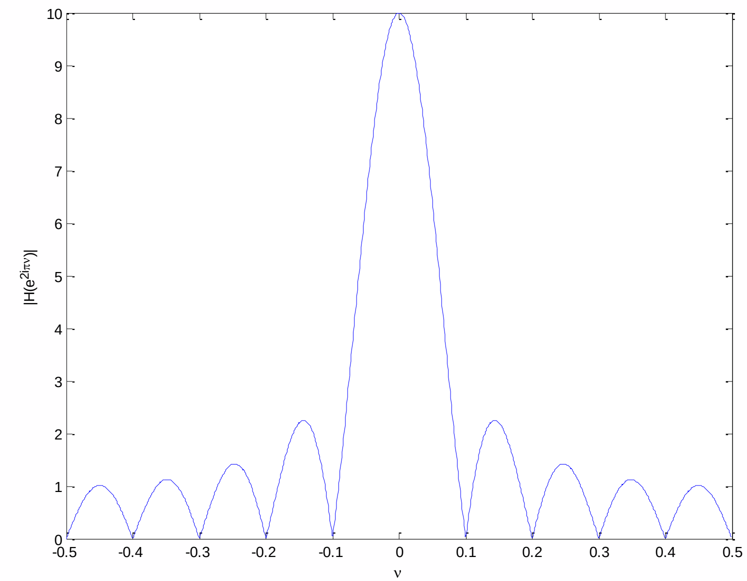
$P(z) = a_p \Pi_i \left(z - \alpha_i^{-1}\right)$

$P(0) = a_0 = 1 = a_p \Pi_i \left(-\alpha_i^{-1}\right)$

$\left(\mathrm{z}^{-1} - \alpha_i^{-1}\right) = \dfrac{\alpha_i - z}{\alpha_i z} \quad \Rightarrow |\, P(z^{-1})| = \Pi_i |z - \alpha_i|$

Exemple





$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ \ldots + z^{-N+1}$$

Module de la TZ du filtre moyenneur (N=10 ici). Son module est nul dès que l’on croise une racine N-ième de l’unité sauf la racine 1.

Inversion d'un filtre récursif stable

- Si un filtre récursif stable a une équation de récurrence, telle que ni P ni Q ne s'annulent sur le cercle unité

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad & b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ \dots + b_q y_{n-q} \\ = \quad & a_0\, x_n + a_1 x_{n-1} + \ \dots + a_p x_{n-p} \end{aligned}$$

- Alors son inverse est aussi récursif stable et a pour équation de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad & a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ \dots + a_q y_{n-q} \\ = \quad & b_0\, x_n + b_1 x_{n-1} + \ \dots + b_p x_{n-p} \end{aligned}$$

- Rem: Si P avait un zéro sur le cercle unité, le filtre ne serait pas inversible.

- Rem: l'inverse d'un filtre RIF est RII

Causalité

- Un filtre stable récursif ($b_0 = 1$) est causal si et seulement si tous ses pôles sont strictement à l'intérieur du disque unité.

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = R(z^{-1}) + \sum_j \frac{\gamma_j}{1 - z^{-1}\beta_j}$$

H causal $\Leftrightarrow H - R = H_1$ causal

Si certains pôles sont à l'extérieur du cercle, pour $n < 0$,

$$h_n = \sum_{j \in B} \gamma_j \beta_j^n \quad (1)$$

B ensemble des index des pôles externes à $\mathbb{U}$

Pour $|n|$ suffisamment grand, dans la (1) il y a un terme dominant, donc h ne peut pas être causal

Filtre à minimum de phase

- Un filtre à minimum de phase est un filtre qui est
  - causal
  - et d'inverse causal
- C'est équivalent à dire que :
  - tous ses pôles et ses zéros sont strictement dans le disque unité.
- Voir TD pour plus de propriétés des minimum de phase

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Pour le SLI stable, récursif, causal d'équation:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad & y_n + b_1 y_{n-1} + \ \ldots + b_q y_{n-q} \\ = \quad & a_0\, x_n + a_1 x_{n-1} + \ \ldots + a_p x_{n-p} \end{aligned}$$

L'algorithme suivant

$$x_n^c = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ x_n \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{t_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{p} a_m x_{n-m}^c - \sum_{k=1}^{q} b_k t_{n-k} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Implémente parfaitement le filtre si x est causale et aussi précisément que voulu à partir d'un certain rang sinon:

$\exists A < 1, C \geq 0 \colon \forall n \geq 0, |t_n - y_n| < C A^n \|x\|_1$

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Si x causale, $x^c = x$

$y = x * h$ doit aussi être causale, donc $\forall n < 0,\ y_n = t_n$

Pour $n \geq -1$, démonstration par récurrence

Base : $y_{-1} = t_{-1} = 0$

Induction : si $\forall k < n, y_k = t_k$ alors $y_n = t_n$

$$y_n = \sum_{m=0}^{p} a_m x_{n-m} - \sum_{m=1}^{q} b_m y_{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{p} a_m x^c_{n-m} - \sum_{m=1}^{q} b_m t_{n-m} = t_n$$

Implémentation causale des filtres récursifs stables et causaux

Si x non-causale, on a toujours $y = x * h$

En plus, $t = h * x^c$ et t doit aussi être causale

Alors $y - t = h * (x - x^c)$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y_n - t_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (x_m - x_m^c) h_{n-m} = \sum_{m<0} x_m h_{n-m}$$

Pour $n > 0$,

$$|y_n - t_n| \leq \sum_{m<0} |x_m|\,|h_{n-m}| \leq \sum_{m<0} |\,x_m|\, C R^{n-m}$$

$$\leq \sum_{m<0} |\,x_m|\, C R^n \leq C R^n \|x\|_1$$

Exemple

- Pour inverser le filtre de réponse impulsionnelle $h_0 = 1$ et $h_1 = \frac{1}{2}$, il suffit de faire 2 opérations par échantillon au lieu d'une infinité si on utilisait la convolution.

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ x_n - \frac{1}{2} t_{n-1} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Non causal?

Essayer d'implémenter de manière causale l'équation de récurrence:

$$y_n - 2y_{n-1} = x_n$$

$h_n = -(2^n)$ pour $n < 0$ (anticausal, stable)

Si on applique l'algorithme récursif, on a, pour $x = \delta$

$$t_n = \delta_n + 2t_{n-1}$$
$$t_{-1} = 0$$
$$t_0 = 1 + 0$$
$$t_1 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$
$$t_2 = 0 + 2 \cdot 2 = 4$$
$$t_n = 2^n \; \forall n > 0$$

Non stable!

Non causal?

Au fait la même équation de récurrence

$$y_n - 2y_{n-1} = x_n$$

correspond à

1. Un filtre **anticausal stable**

$$h_n = \begin{cases} -(2^n) \text{ pour } n < 0 \\ \quad 0 \quad\ \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

2. Un système **causale non stable**

$$h_n = \begin{cases} 0 \quad \text{ pour } n < 0 \\ 2^n \ \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

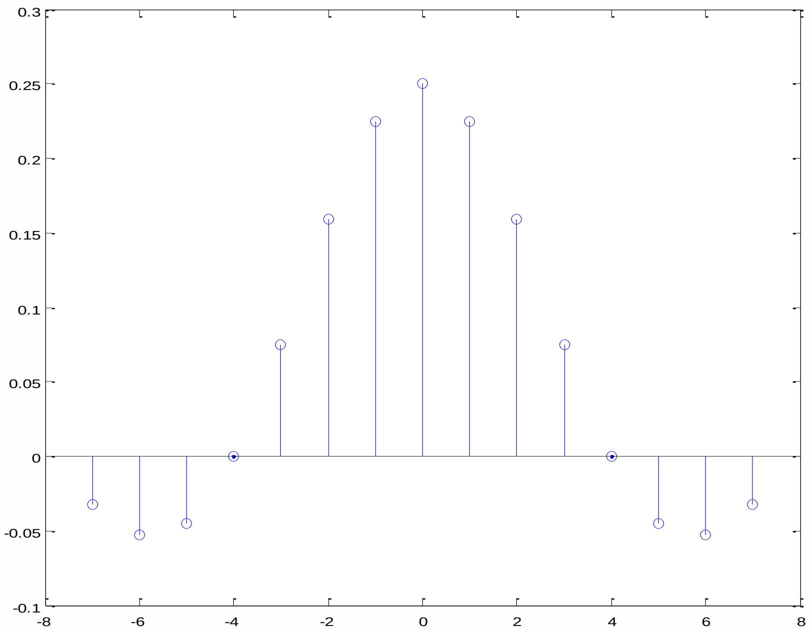
Seulement le premier possède une TZ (c'est-à-dire, la somme $\sum_m h_m z^{-m}$ converge $\forall z \in \mathbb{U}$)

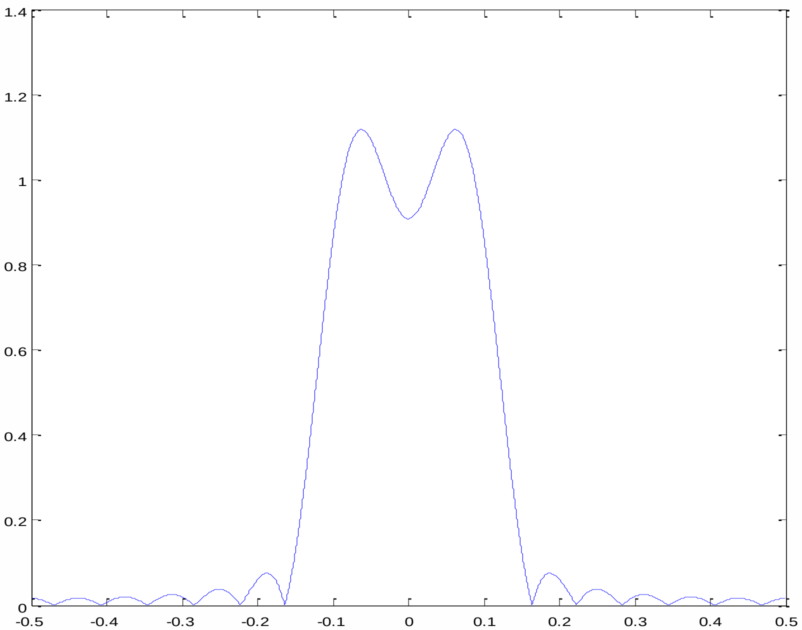
Rem. L'équation de récurrence a bien une **unique** solution **sommable**

Synthèse de filtre: Méthode de la fenêtre

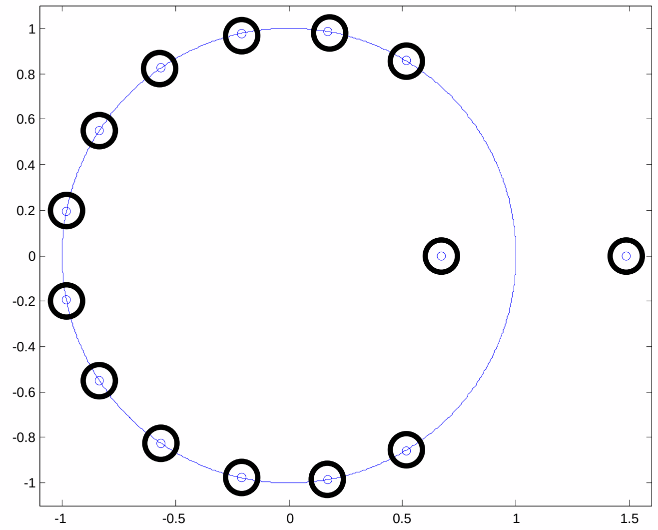
- h est une RI donnée. On veut l'approcher par une RIF g qui vérifie:
$$g_n = 0 \text{ si } |n| > N$$
- Le critère a optimiser est: $\int_{-1/2}^{1/2} \left|\hat{h}(\nu) - \hat{g}(\nu)\right|^2 \mathrm{d}\nu = \left\|\hat{h} - \hat{g}\right\|_2^2 =$
$\|h - g\|_2^2 =$
$$\sum_{|n| \leq N} |h_n - g_n|^2 + \sum_{|n| > N} |h_n|^2$$
- L'optimum est: $g_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n > N \\ h_n \text{ si } n \leq N \end{cases}$, d'où le nom…
- Si on veut approximer un FPB idéal avec fréq 1/8, $h_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)}{\pi n}$
EQ décroit comme $1/N$

Synthèse de filtre: Méthode de la fenêtre





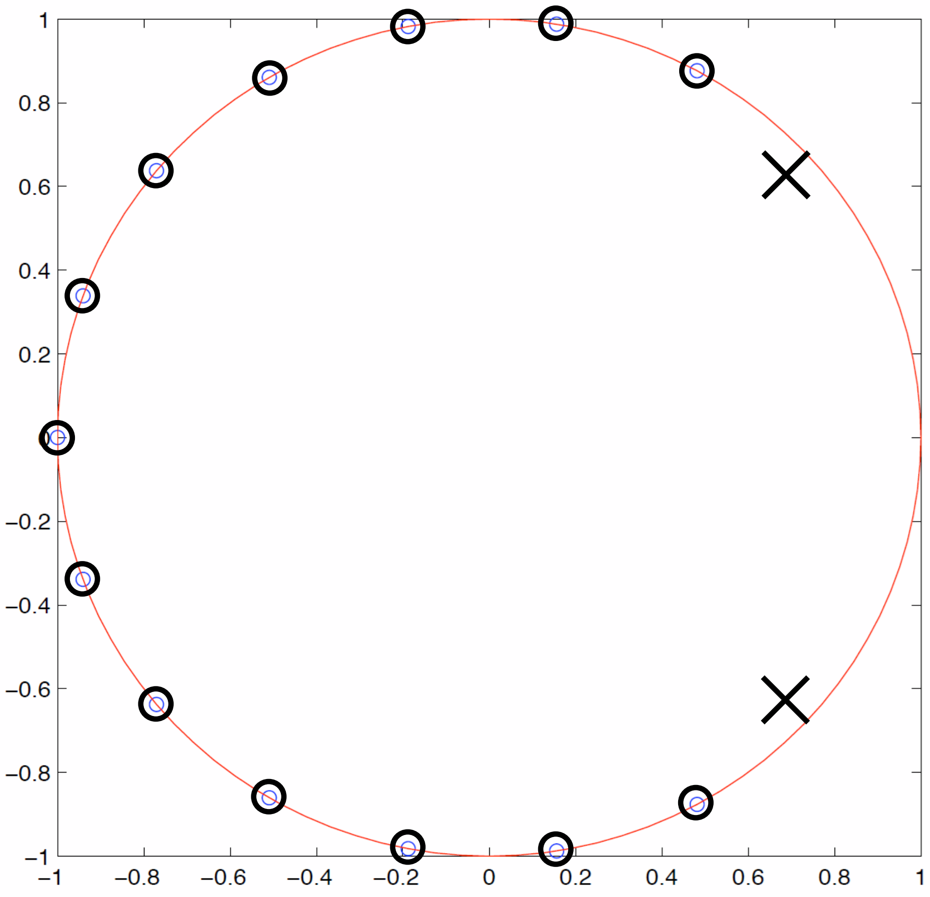
g_n

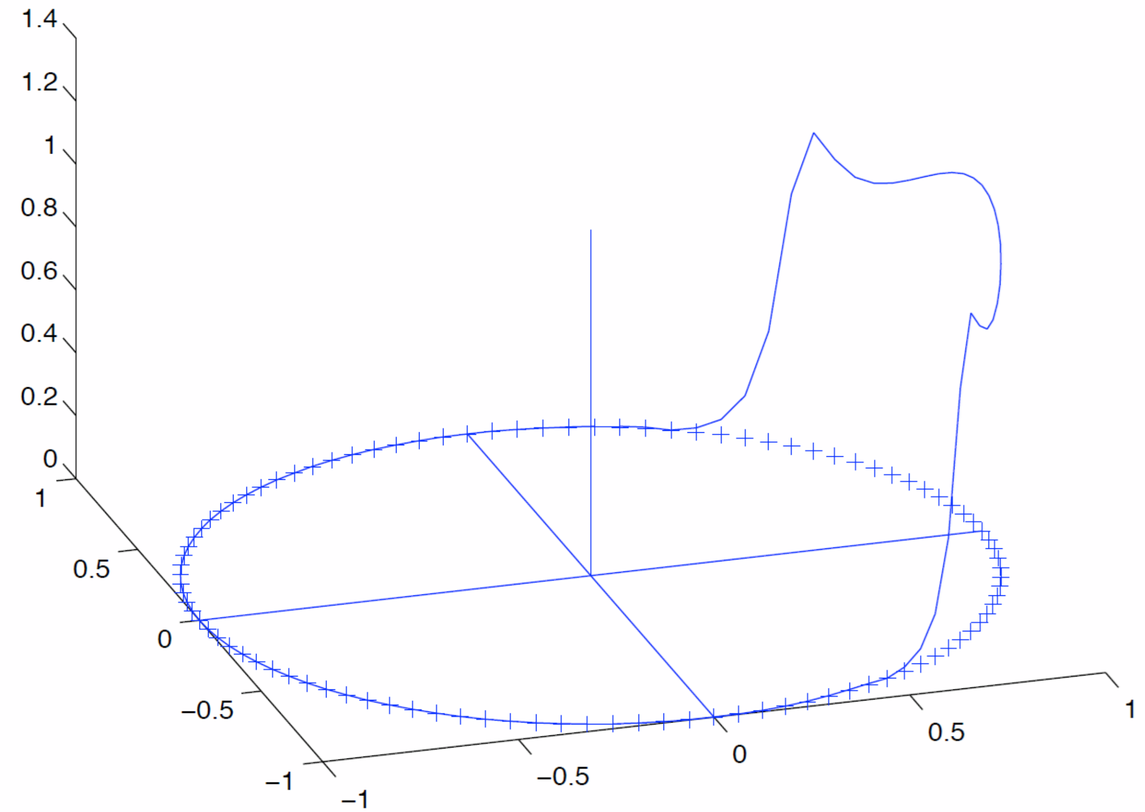


$|\hat{g}(\nu)|$

Zéros de $G(z)$

Synthèse de filtre par choix de pôles et zéros d'un SLI stable récursif





Avec le même nombre d'opérations que dans la méthode de la fenêtre, on obtient une approximation 3 fois meilleure, dans ce cas. (gauche, 2 pôles 'x' et 13 zéros 'o')