

Transformée de Fourier sur \mathbb{R} et $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

cagnazzo@enst.fr

Espaces de fonctions

$L^1(\mathbb{R})$: **fonctions sommables**

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$$

$L^2(\mathbb{R})$: **fonctions à énergie finie**

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

$L^\infty(\mathbb{R})$: **fonctions bornées**

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ p.p.}$$

Inclusions

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

Dém. $\int |f|^2 \leq \int \|f\|_\infty |f| = \|f\|_\infty \|f\|_1$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\exists A: \forall |x| > A, f(x) = 0 \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

Dém.

$$\begin{aligned} \int |f| &= \int_{|f|>1} |f| + \int_{0<|f|\leq 1} |f| + \int_{|f|=0} |f| \\ &\leq \int_{|f|>1} |f|^2 + \int_{0<|f|\leq 1} 1 \leq \|f\|_2^2 + 2A \end{aligned}$$

Règles de calcul

$$L^k \cdot L^\infty \rightarrow L^k$$

$$L^2 \cdot L^2 \rightarrow L^1$$

et la norme L^1 du produit est inférieure ou égale à au produit des normes L^2 (Cauchy-Schwartz)

$$L^k * L^1 \rightarrow L^k$$

$$L^2 * L^2 \rightarrow L^\infty$$

En plus, dans le dernier cas, la convolution est continue, tend vers 0 à l'infini, et sa norme est inférieure ou égale au produit des 2 normes

Transformée de Fourier temps continu (TFtC): fonctions sommables

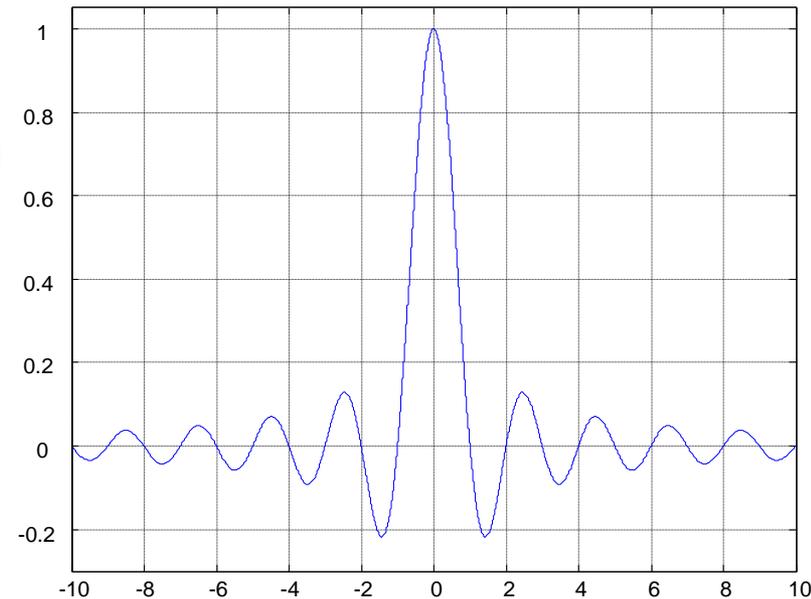
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa TFtC \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$:

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = [\mathcal{F}(f)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$$

Dans ce cas, \hat{f} est continue, bornée ($\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$) et tend vers 0 à l'infini.

Exemple: calculer la TFtC de $\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(x)$

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} = \text{sinc}(\pi\nu)$$



Extension à $L^2(\mathbb{R})$

- Il existe une seule application linéaire entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ tel que:
 - 1) Elle coïncide avec \mathcal{F} sur $L^1(\mathbb{R})$
 - 2) Satisfait l'égalité de Parseval: $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$
 - 3) Est bijective

Théorème d'inversion

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ on définit transformée inverse de f la fonction

$$\bar{\mathcal{F}}[f](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2i\pi t\nu} dt$$

Alors $\bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(f)] = f$

L'identité est ponctuelle pour $L^1(\mathbb{R})$ et en norme pour $L^2(\mathbb{R})$

Exemple : calculer la transformée de $g(x) = [\text{sinc}(\pi x)]^2$

$$\mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[h \cdot h] = \mathcal{F}[h] * \mathcal{F}[h]$$

Calcul de la TFtC en $L^2(\mathbb{R})$

- Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la formule $\int f(x)e^{-2i\pi v} dx$ devrait s'interpréter dans les sens des distributions
- En pratique : si $f = \mathcal{F}(g) \in L^2$, la transformée de f est g symétrisée
 - Exemple: calculer la TFtC de $\text{sinC}(\pi x)$
 - $\hat{f}(v) = \mathbb{I}_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(v)$
- On peut considérer la suite de fonctions $f_N(x) = f(x)\mathbb{I}_{(-N, N)} \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer $\mathcal{F}(f)$ comme limite de $\mathcal{F}(f_N)$

Propriétés

Soit :

$$f, g \in L^1 \cup L^2, \phi(x) = e^{2i\pi\nu_0 x}, f^\nu(x) = f(x - y)$$

Si les règles de calcul le permettent, on a:

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$$

$$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$$

$$\mathcal{F}(\phi f) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$$

$$\mathcal{F}(f^\nu)(\nu) = \hat{f}(\nu) e^{-2i\pi\nu y}$$

Propriétés

Symétrie : Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$,
alors $\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = \hat{f}(-\nu)$

Symétrie hermitienne : Si f est réelle, alors
 $\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$

Si f est réelle et symétrique, \hat{f} est réelle et symétrique

Re-normalisation du temps

$$\mathcal{F}[f(\lambda x)](\nu) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)$$

Exemple : calculer la TFtC de $\mathbb{I}\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$

$$\hat{f}(\nu) = A \operatorname{sinc}(A\pi\nu)$$

Régularité et décroissance

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, K\}, x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \\ \hat{f} \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{f}^{(k)}(\nu) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^k f(x)]$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, K\}, f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}), \\ f^{(k)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

\Rightarrow

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, K\}, \lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \nu^k \hat{f}(\nu) = 0$$

$$\text{et } \mathcal{F}[f^{(k)}](\nu) = (2i\pi x)^k \hat{f}(\nu)$$

Régularité et décroissance

La fonction $f = \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$ a une décroissance
extrêmement rapide (support borné)

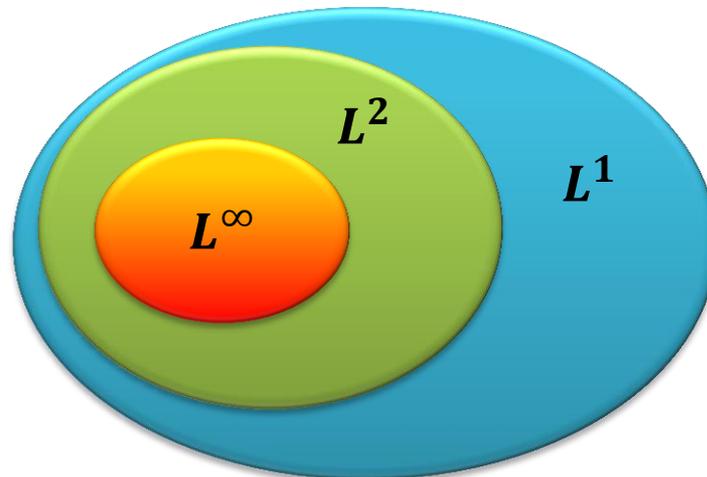
\Rightarrow Sa transformée $\hat{f} = \text{sinc}$ est extrêmement
régulière : $\hat{f} \in \mathcal{C}^{(\infty)}$

La fonction $f = \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$ n'est pas régulière (continue)

\Rightarrow Sa transformée $\hat{f} = \text{sinc}$ décroît lentement à
l'infini (comme $1/\nu$)

TF en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: Coefficients de Fourier

- On considère les fonctions en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- On peut voir ces fonctions comme une période de fonctions périodiques
- On a $L^\infty \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \subset L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \subset L^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$



Coefficients de Fourier

Si $f \in L^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right)$, on appelle *coefficients de Fourier* la suite c_k :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2i\pi kt} dt$$

La suite c_k tend à zéro pour $k \rightarrow \pm\infty$

Pour les inclusions, cette définition est aussi valable pour les fonctions à énergie finie et pour les fonctions bornées

Propriétés

$f, g \in L^p \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right)$, c, d sont leurs c.d.F.

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi mt}) = \delta_{k-m}$$

$$p = 1, \quad \mathcal{F}(f * g) = cd$$

$$p = 2, \quad \mathcal{F}(fg) = c * d$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{2i\pi k_0 t}](k) = c(k - k_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t - y)](k) = c(k)e^{-2i\pi ky}$$

Propriétés

Symétrie hermitienne : si f est réelle, $c_{-k} = \bar{c}_k$

Symétrie : si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$, $c_{-k} = c_k$

Si f est réelle et symétrique, ses c.d.F sont aussi réels et symétriques

Parseval : Si $f \in L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$ et c_k sont ses c.d.F., alors $c_k \in l^2(\mathbb{Z})$ et

$$\|f\|_2 = \|c\|_2$$

Inversion

$$f \in L^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right) \text{ et } c \in l^1$$

$$\Rightarrow \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi tk} = f(t)$$

Ce qui signifie aussi que $f(-\cdot)$ est la TFtD de c_k

$f \in L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right) \Rightarrow \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi tk}$ tend à $f(t)$
en norme quadratique, c'est-à-dire :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{k=-K}^K c_k e^{2i\pi tk} \right| dt = 0$$

Régularité et décroissance

Si

$$f \in L^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) \cap \mathcal{C}^{(N)},$$

Alors :

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} k^N c_k = 0$$

et

les c.d.F. de sa dérivée d'ordre m sont $(2i\pi k)^m c_k$

Re-normalisation du temps

On s'intéresse aux fonctions définies sur $\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$

Cela correspond aux fonctions périodiques de période A

Les ondes de Fourier sont :

$$\forall t \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right] \rightarrow e^{2i\pi n \frac{t}{A}}$$

Onde de fréquence $\frac{n}{A}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Renormalisation du temps

Les c.d.F. d'une fonction définie sur $\left[-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right]$ sont

$$c_k = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} f(t) e^{-\frac{2i\pi t}{A}} dt$$

Ils ont les mêmes propriétés que dans le cas $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,
sauf Parseval:

$$\|f\|_2 = \sqrt{A} \|c\|_2$$