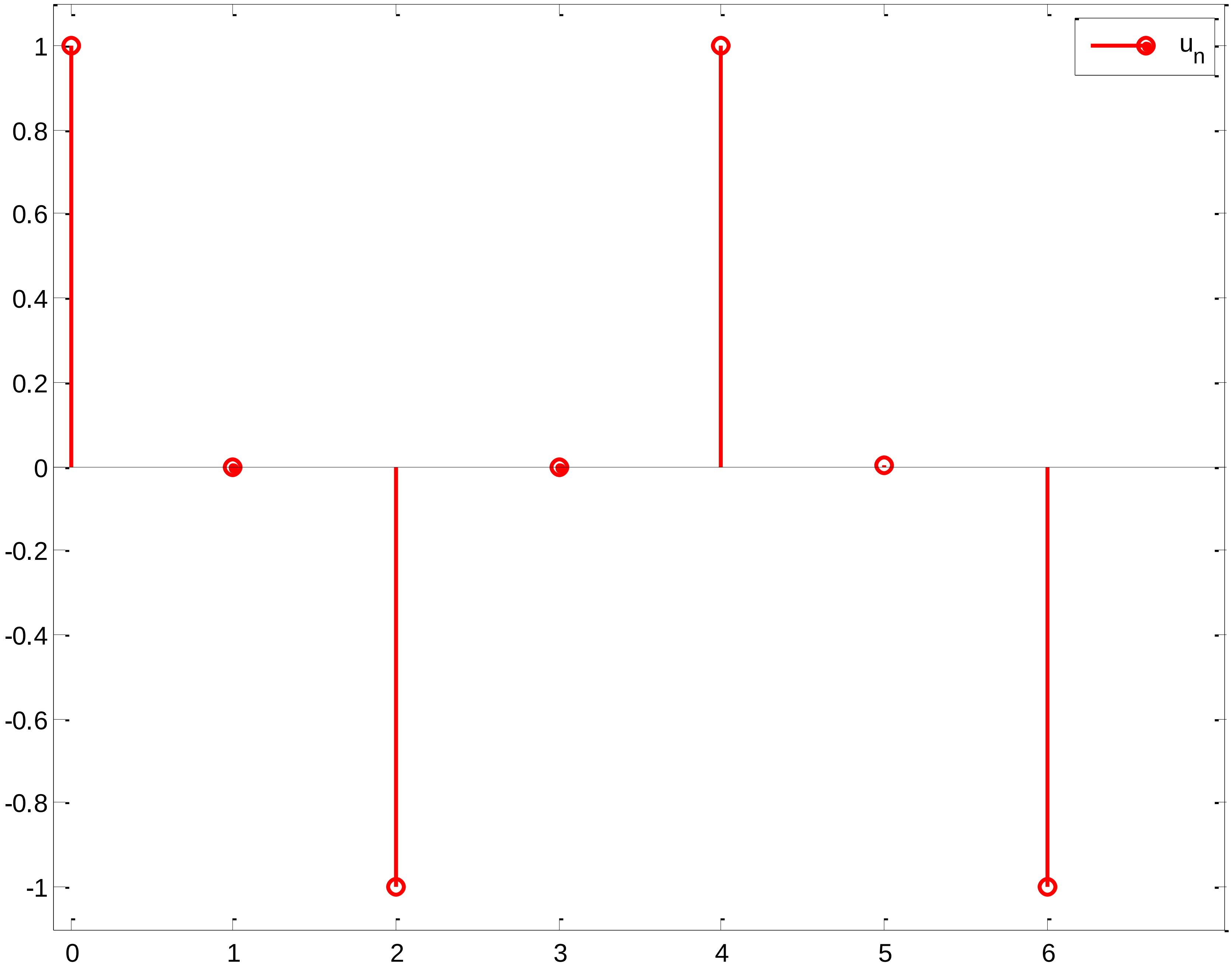
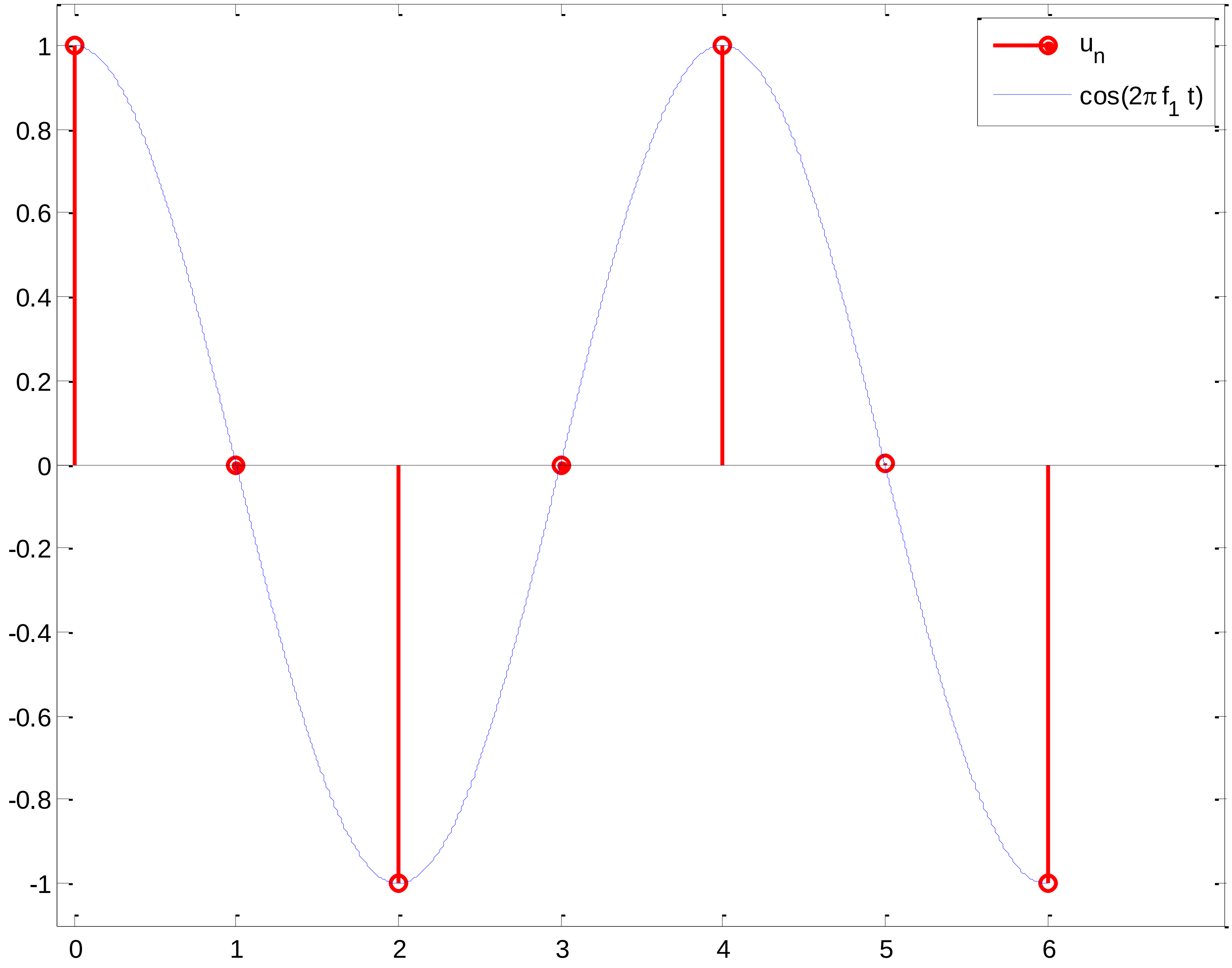
# Échantillonnage

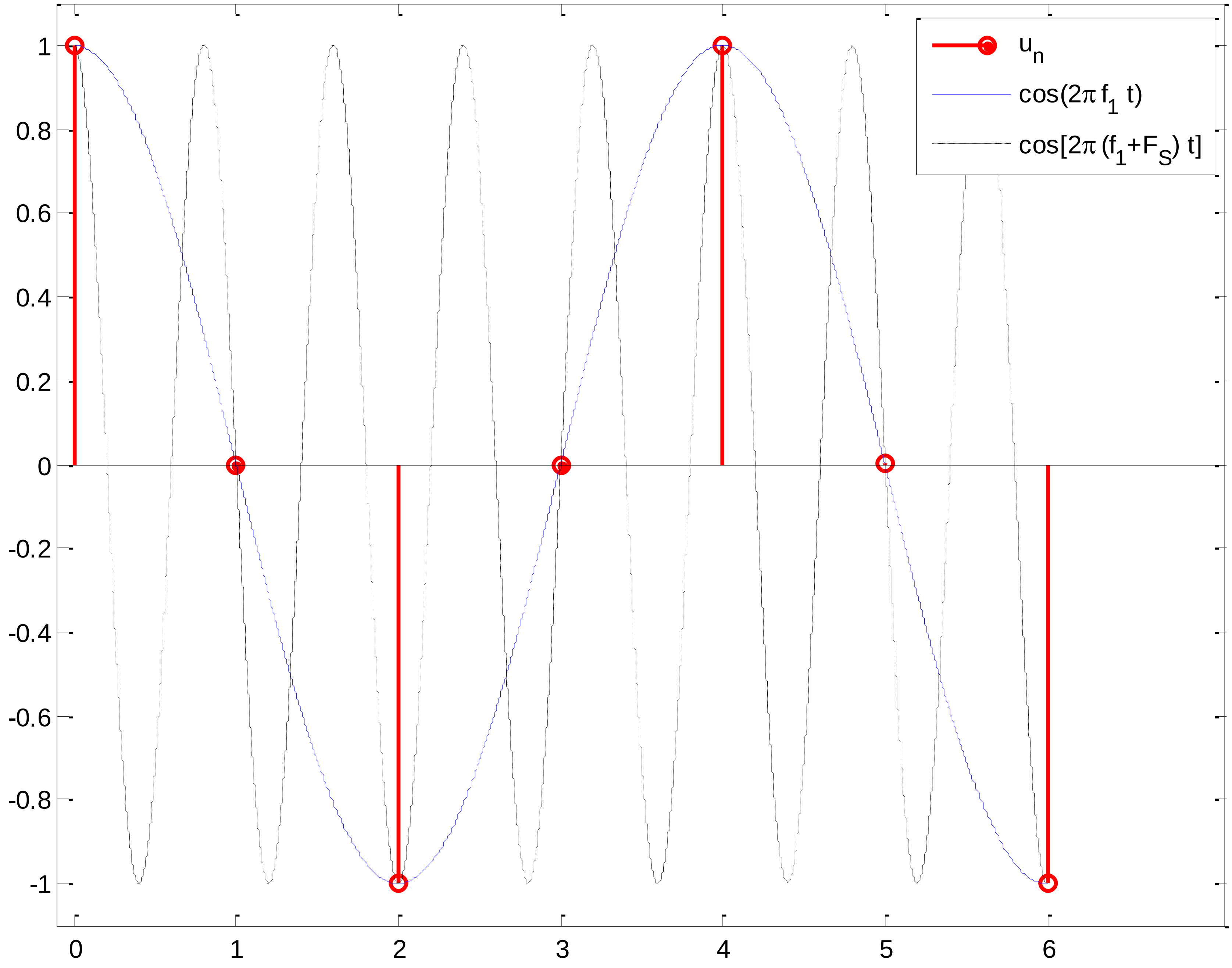
cagnazzo@enst.fr

# Exemple  : échantillonnage d’une onde

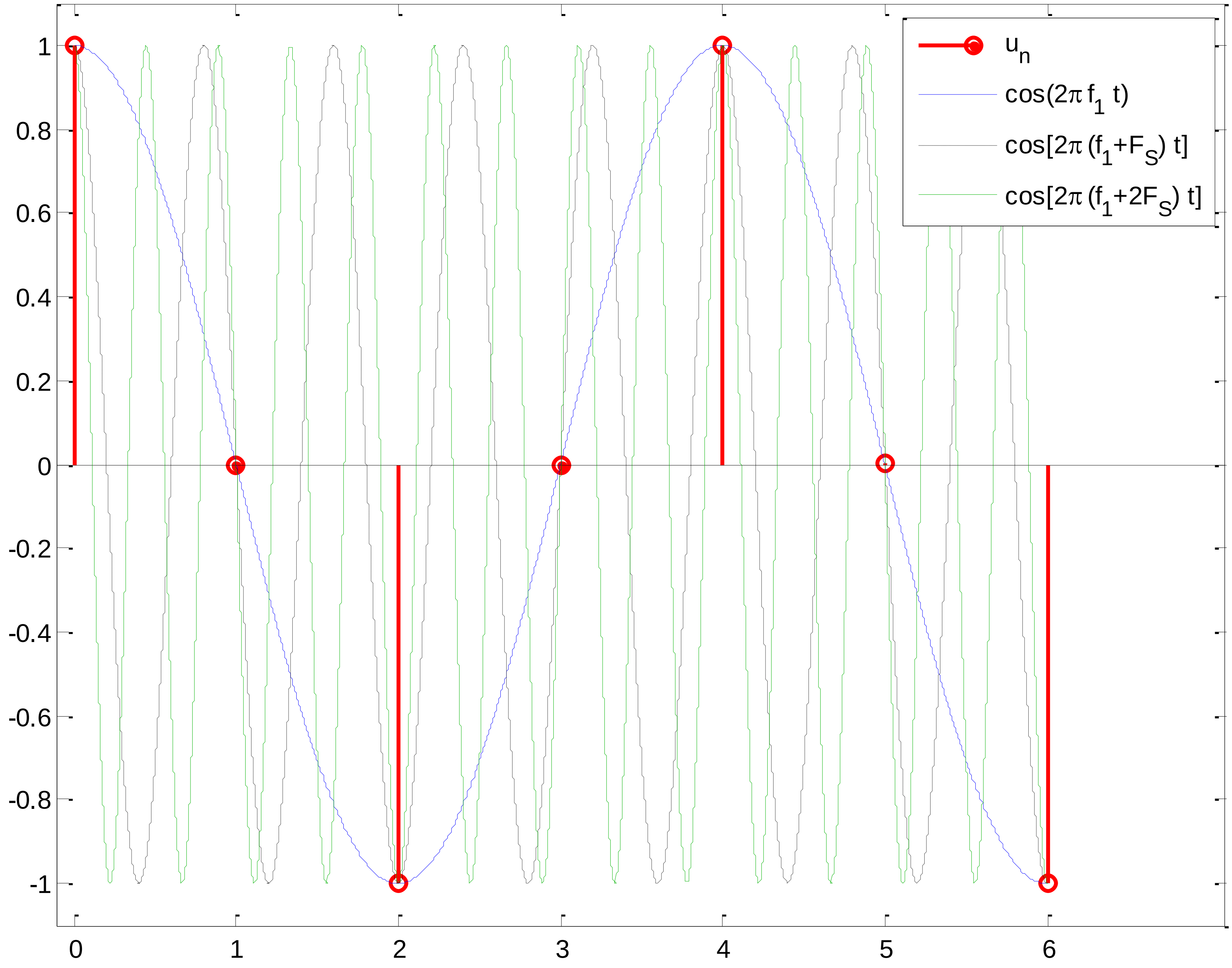




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
$u_n$
$\cos(2\pi f_1\ t)$



$u_n$
$\cos(2\pi f_1 t)$
$\cos[2\pi (f_1+F_S) t]$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
$u_n$
$\cos(2\pi f_1 t)$
$\cos[2\pi (f_1+F_S) t]$
$\cos[2\pi (f_1+2F_S) t]$

# Formule de Poisson

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}), f(n) \in l^1, \hat{f}(m) \in l^1 \Rightarrow$$

$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \qquad \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) e^{-2i\pi m\nu} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$

On pose $g(\nu) = \sum \hat{f}(\nu + n)$ on calcule les cdF de $g$ : on trouve $c_m = f(-m)$. On applique le théorème d’inversion aux cdF et on conclue

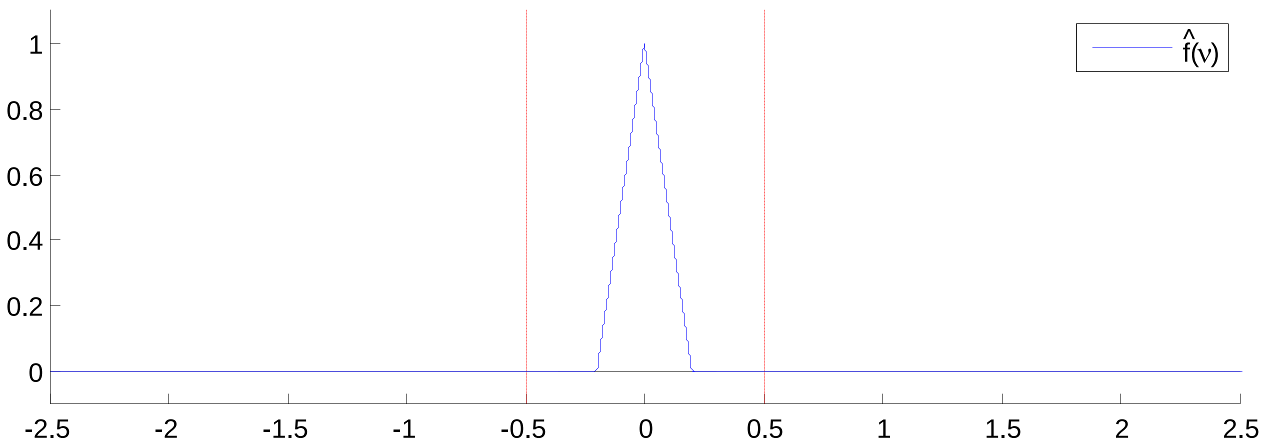
# Formule de Poisson

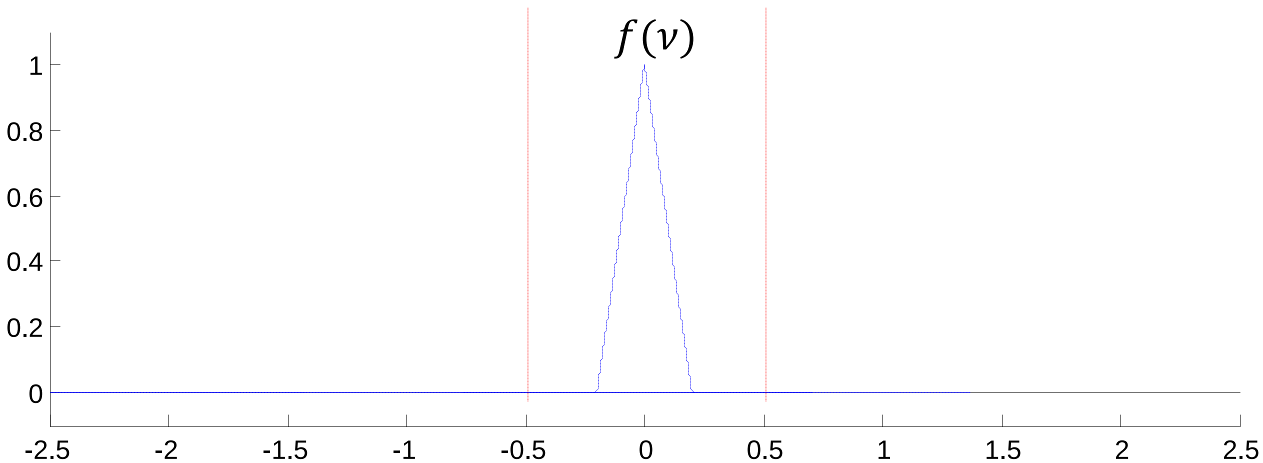
- $\sum_m f(m) = \sum_n \hat{f}(n)$

- $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$

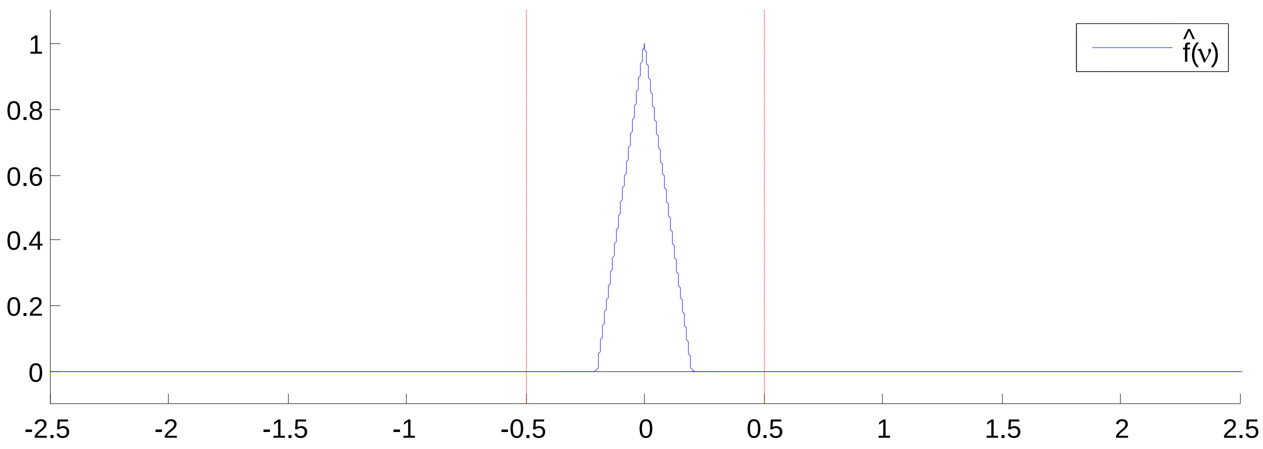
- Repliement spectral

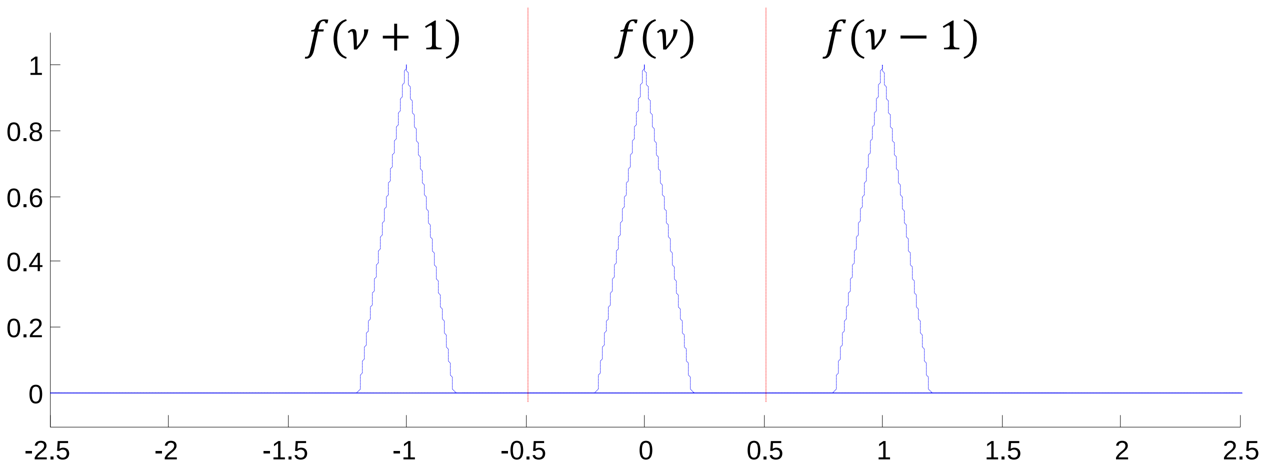
$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$



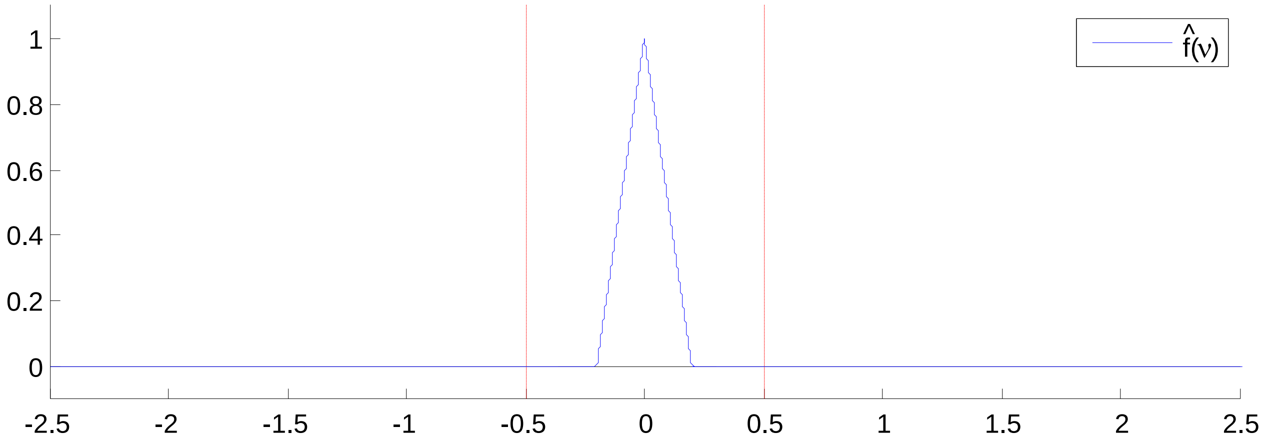



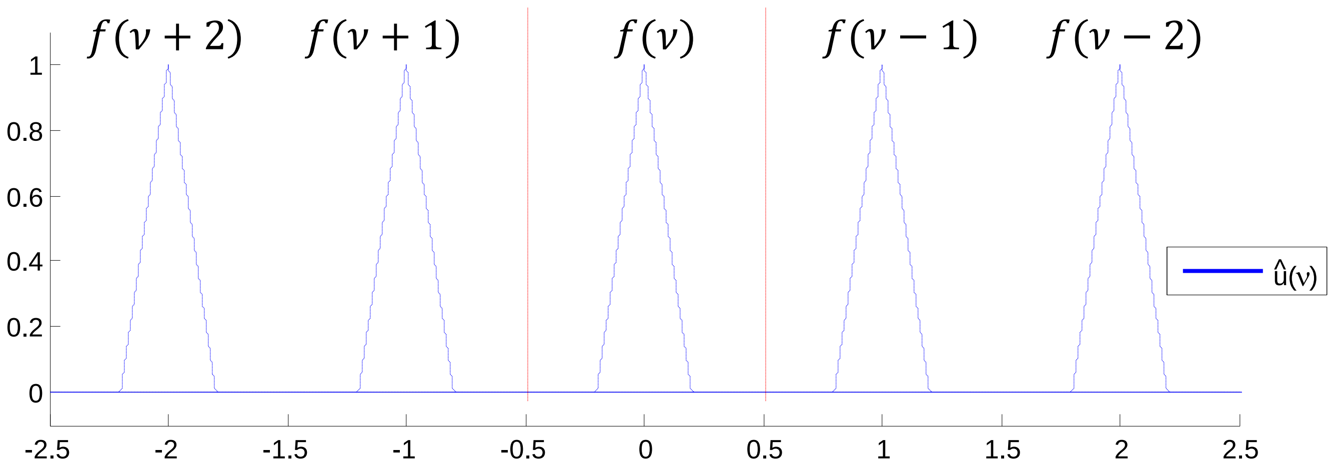
$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu+n)$$



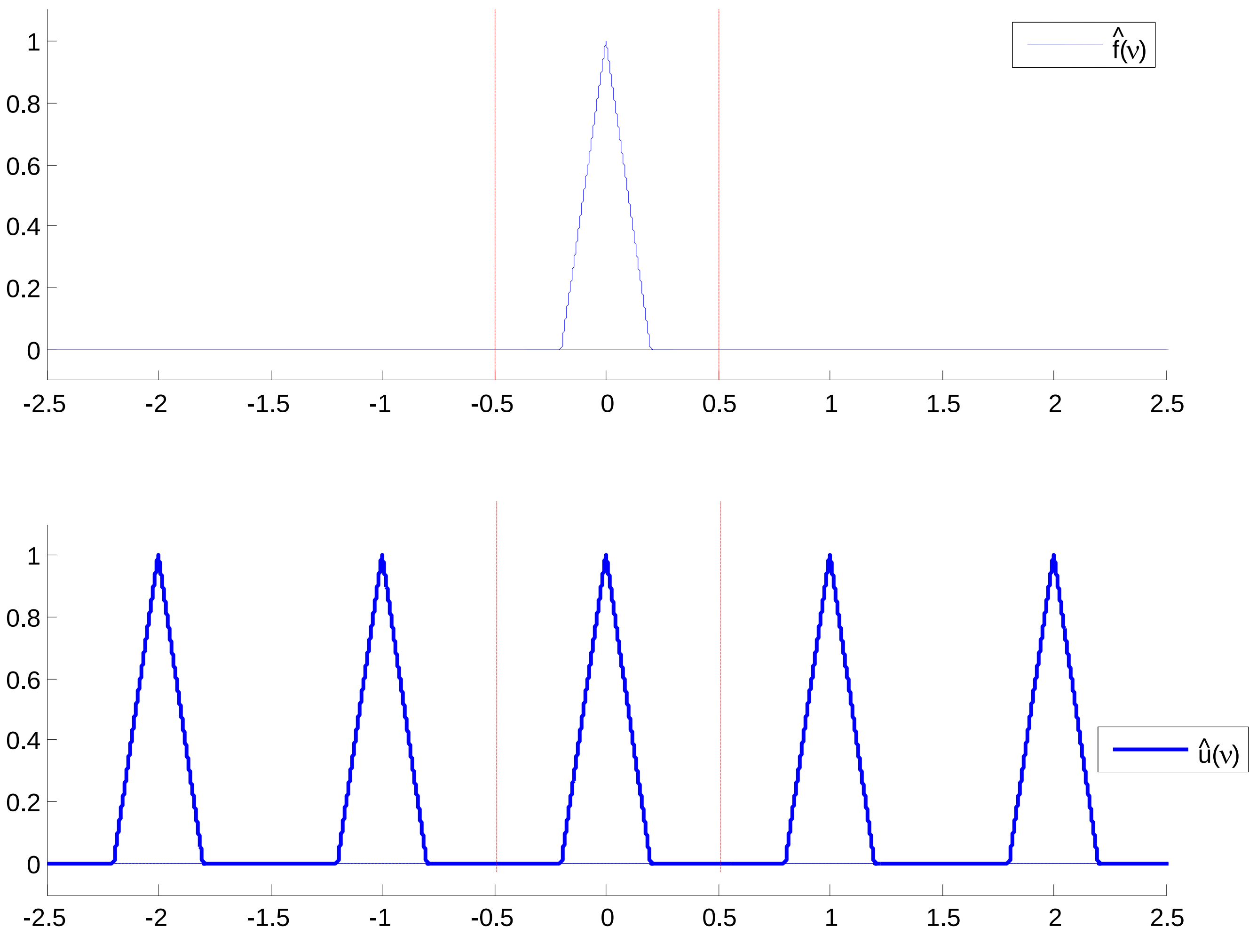



$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$

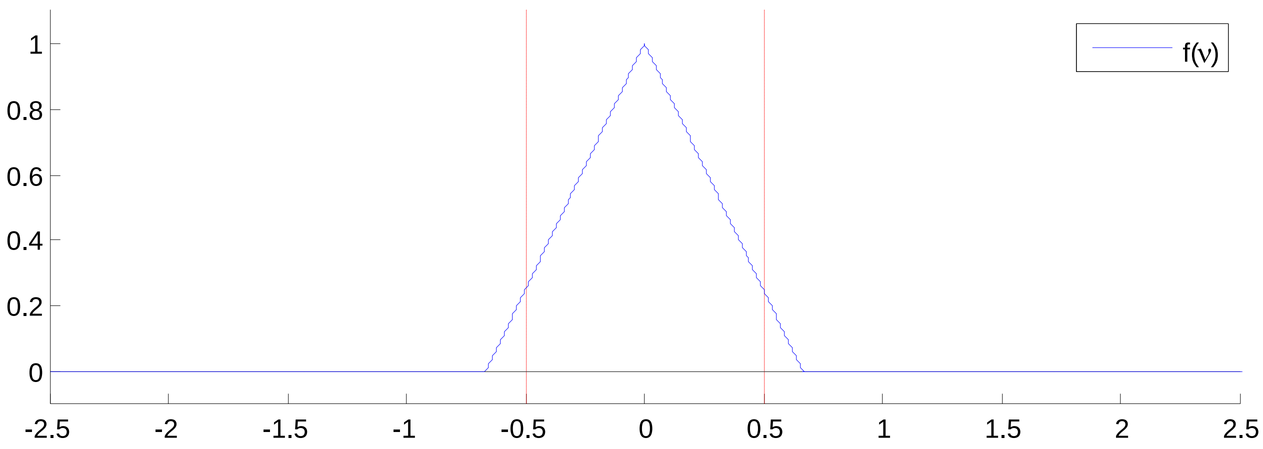


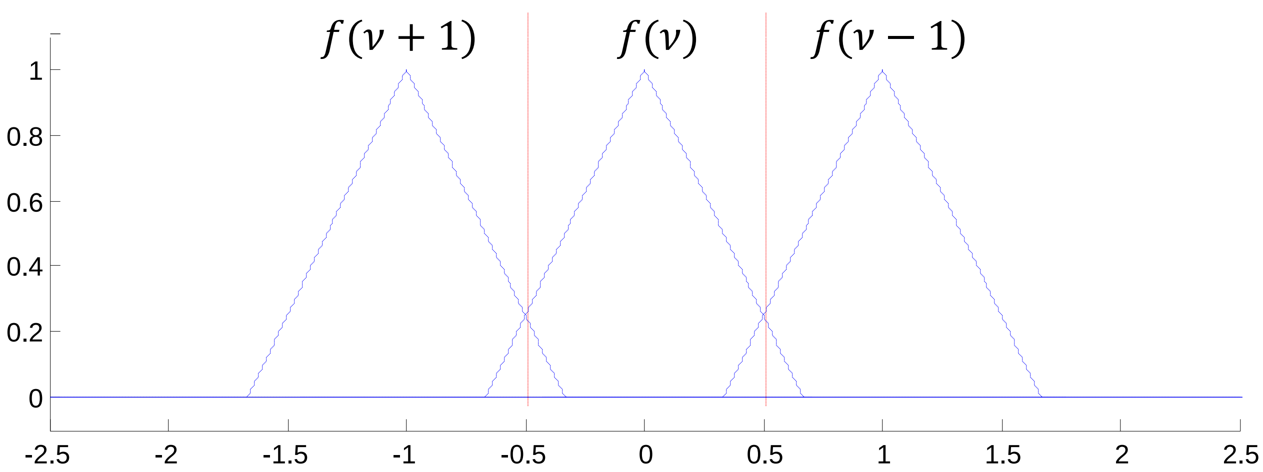



$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$

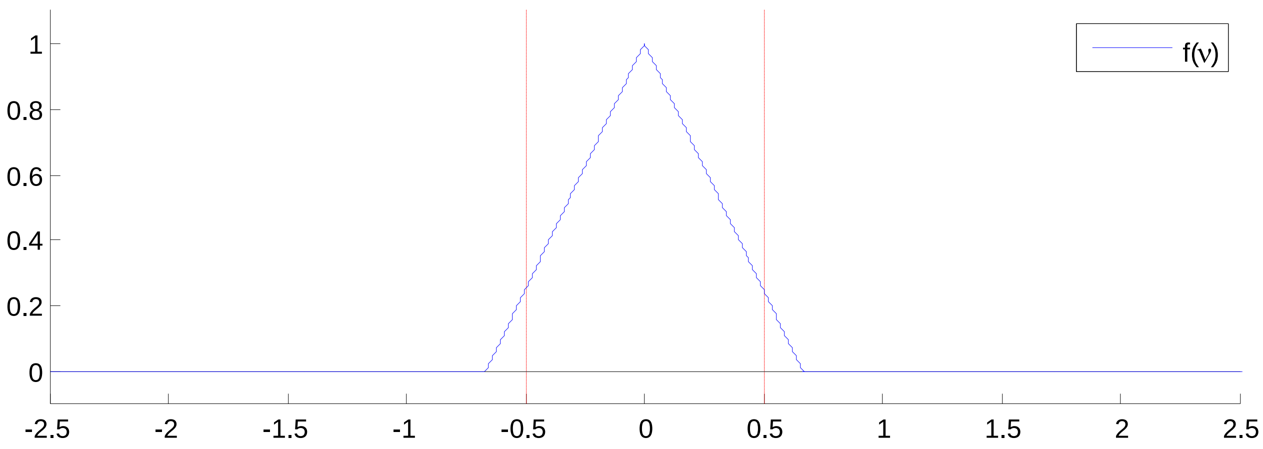


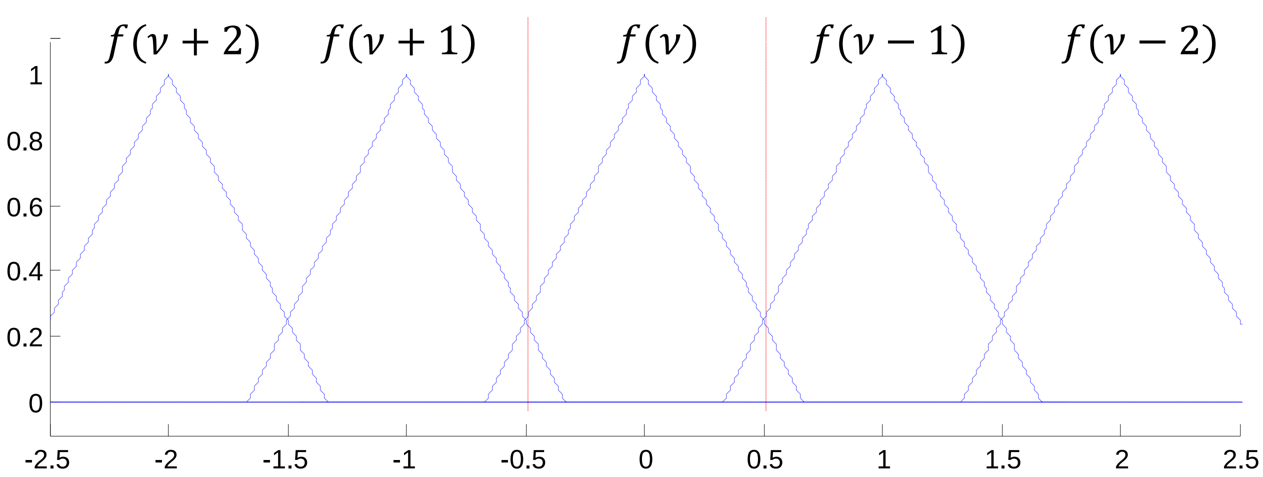
$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$



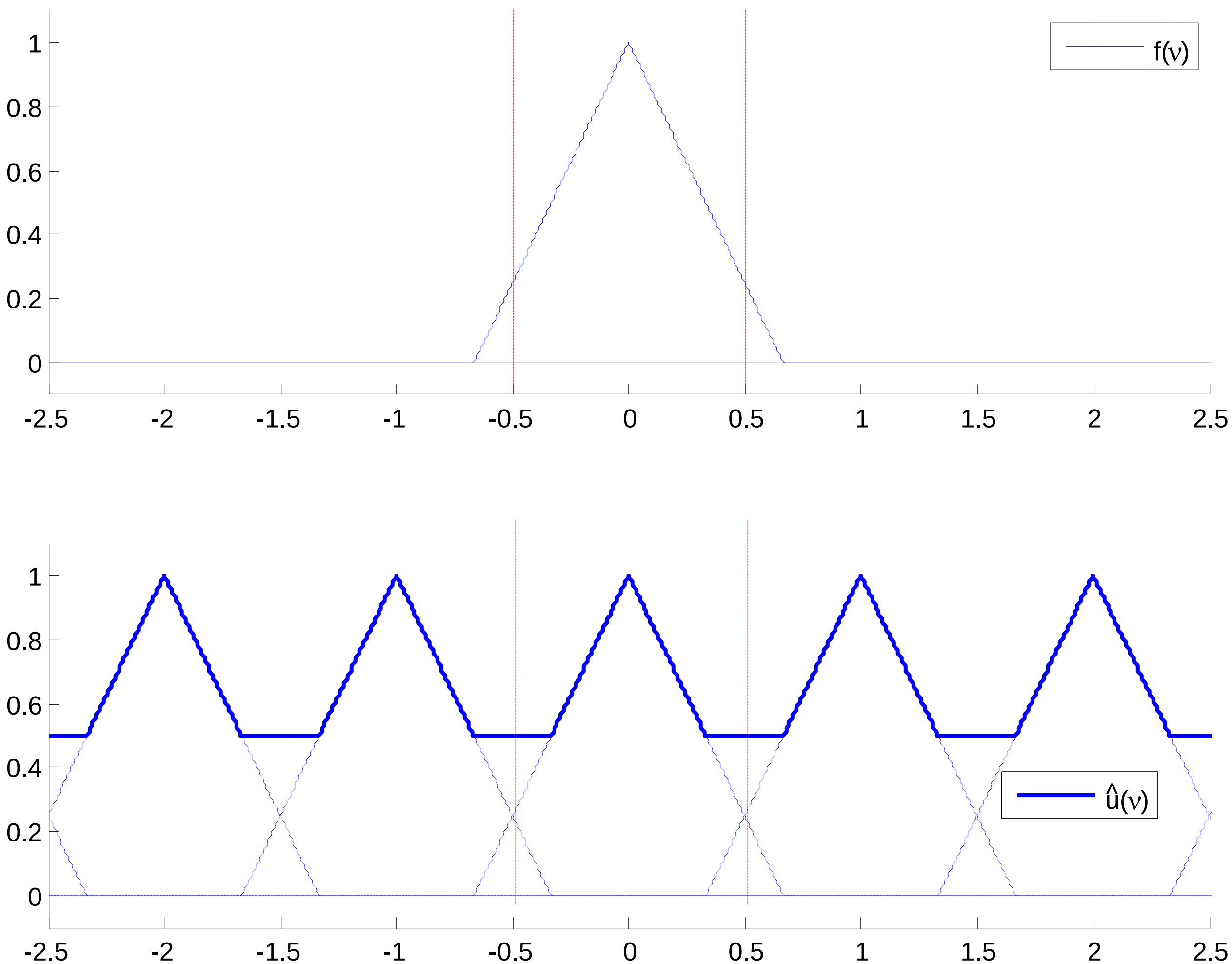



$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$

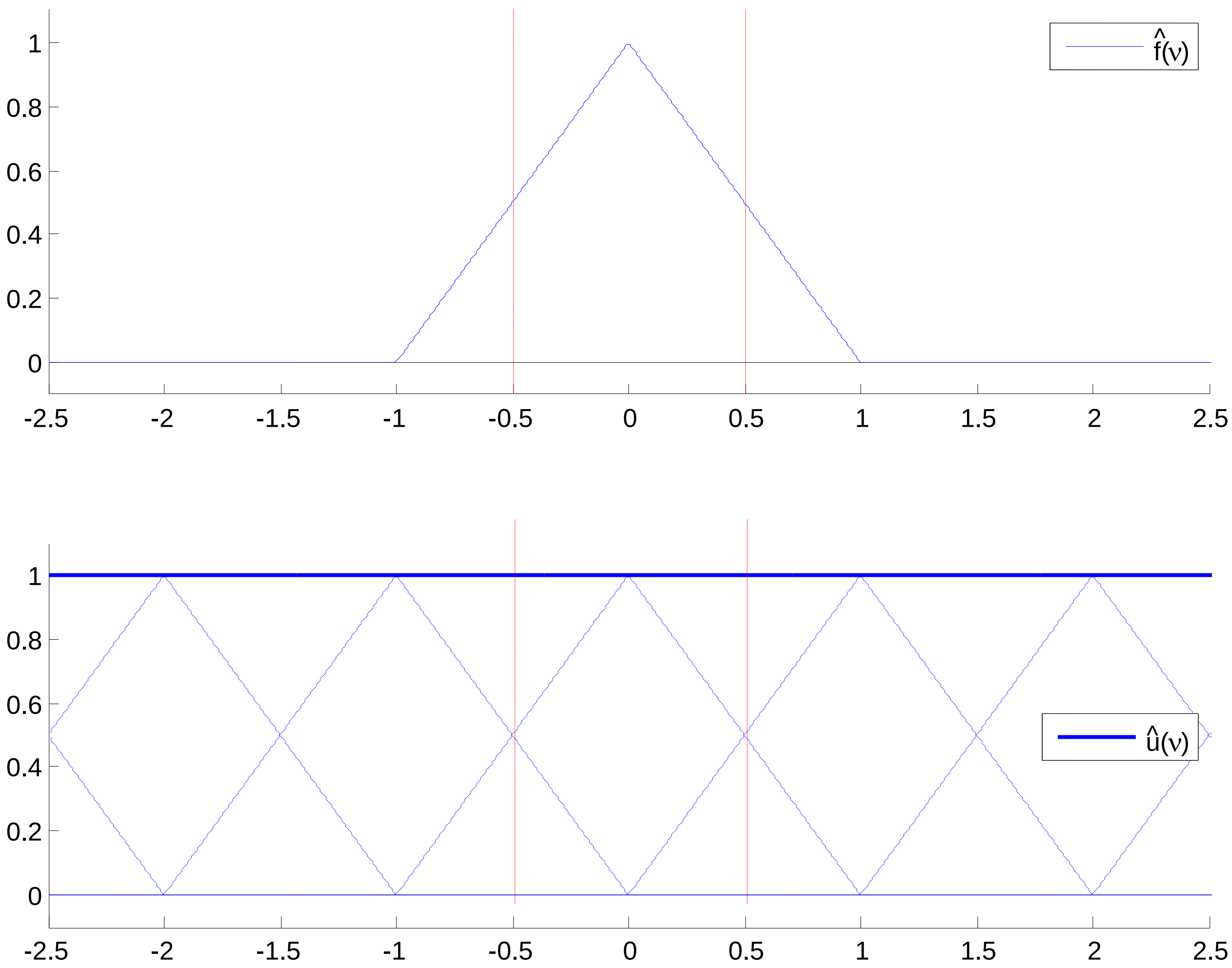


$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$



$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\nu + n)$$



# Théorème de Shannon

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \nu \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\ \hat{f}(\nu) = 0$ et $f(n) \in l^1$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \mathrm{sinC}[\pi(t-n)]$$

Et

$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{-2i\pi\nu m} = \hat{f}(\nu)$$

Dém. $\hat{f}$ bornée et à support borné, donc $\hat{f} \in L^1$

On applique Poisson: $\sum_m f(m) e^{-2i\pi\nu m} = \sum_n \hat{f}(n+\nu) = \hat{f}(\nu)$

On applique le théorème d'inversion à $\hat{f}$ et on conclue

**Injectivité** : si $f$ et $g$ satisfont les hypothèses et en plus
$\forall n \in \mathbb{R}, f(n) = g(n)$, alors $f = g$

# Théorème de Shannon sur $L^2$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ a support en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\; f(n) = u_n \Rightarrow \|f\|_2 = \|u\|_2$$

Dém. On pose la même fonction $g(\nu)$ qu'on a dans Poisson:
$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $g(\nu) = \sum_n \hat{f}(n+\nu) = \hat{f}(\nu)$

Par Poisson, les cdF de $g$ sont $c_m = f(-m) = u_{-m}$et par Parseval

$$\|u\|_2^2 = \|c\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |g|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left|\hat{f}\right|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}\right|^2$$
$$= \|f\|_2^2$$

# Théorème de Shannon sur $L^2$

Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, les spectres sont à support fini $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, g(n) = f(n)$

Alors $f = g$ en norme quadratique, c'est-à-dire,

$$\|f - g\|_2 = 0$$

Dém. $h = f - g$ respecte les hypothèse du théorème précédent, donc, si $u_n = h(n)$,

$$\|f - g\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \|u\|_2^2 = \sum_n [f(n) - g(n)]^2 = 0$$

# Théorème de Shannon sur $L^2$

Maintenant, soit $g_N = \sum_{n=-N}^{N} f(n)\,\mathrm{sinC}_{\mathrm{n}}^{\pi}$

Avec $\mathrm{sinC}_n^{\pi}(t) = \mathrm{sinC}[\pi(t-n)]$

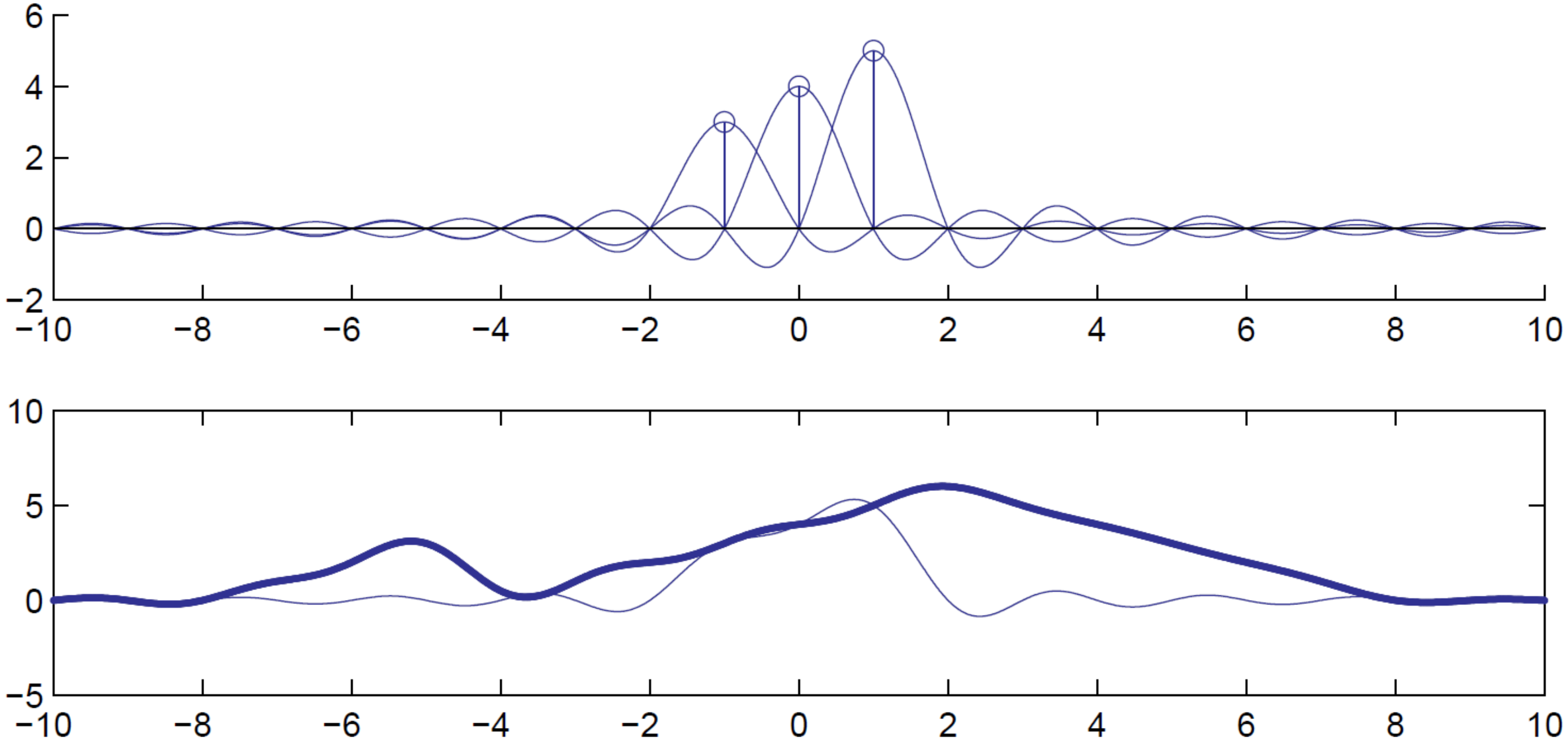
Comme $h$, les fonctions $f_N = f - g_N$ respectent les hypothèses du théorème pour tout $N$, donc

$$\left\|f - \Sigma_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}}\, f(n)\mathrm{sinC}_{\mathrm{n}}^{\pi}\right\|_2^2 = \|f_N\|_2^2 = \|u_N\|_2^2$$
$$= \sum_{|n|>N} |f(n)|^2 \to_N 0$$

Donc $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,\mathrm{sinC}_{\mathrm{n}}^{\pi}$ en sens $L^2$

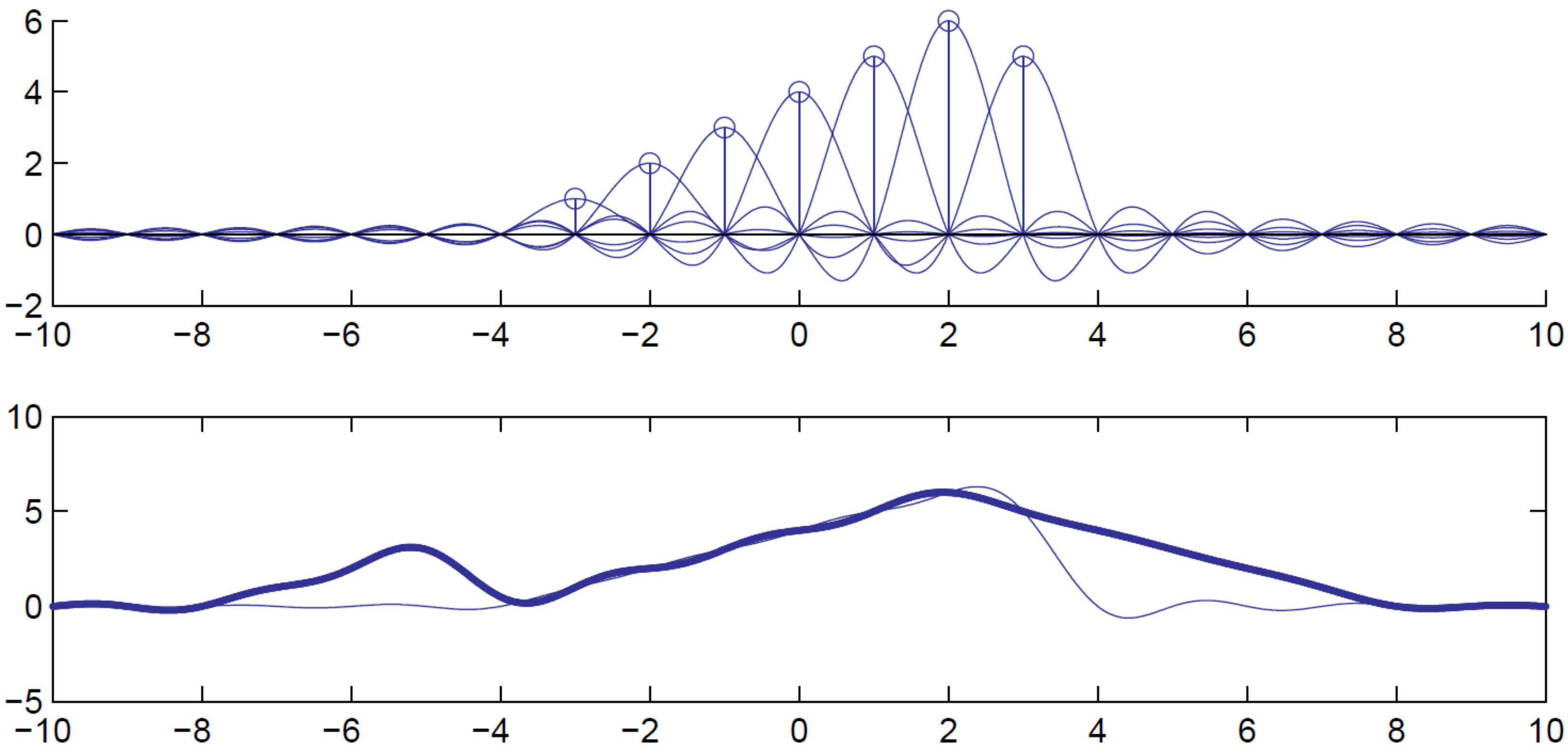
# Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \mathrm{sinC}[\pi(t-n)]$ ou son équivalent en $L^2$ sont dites de reconstruction parfaite ou idéale



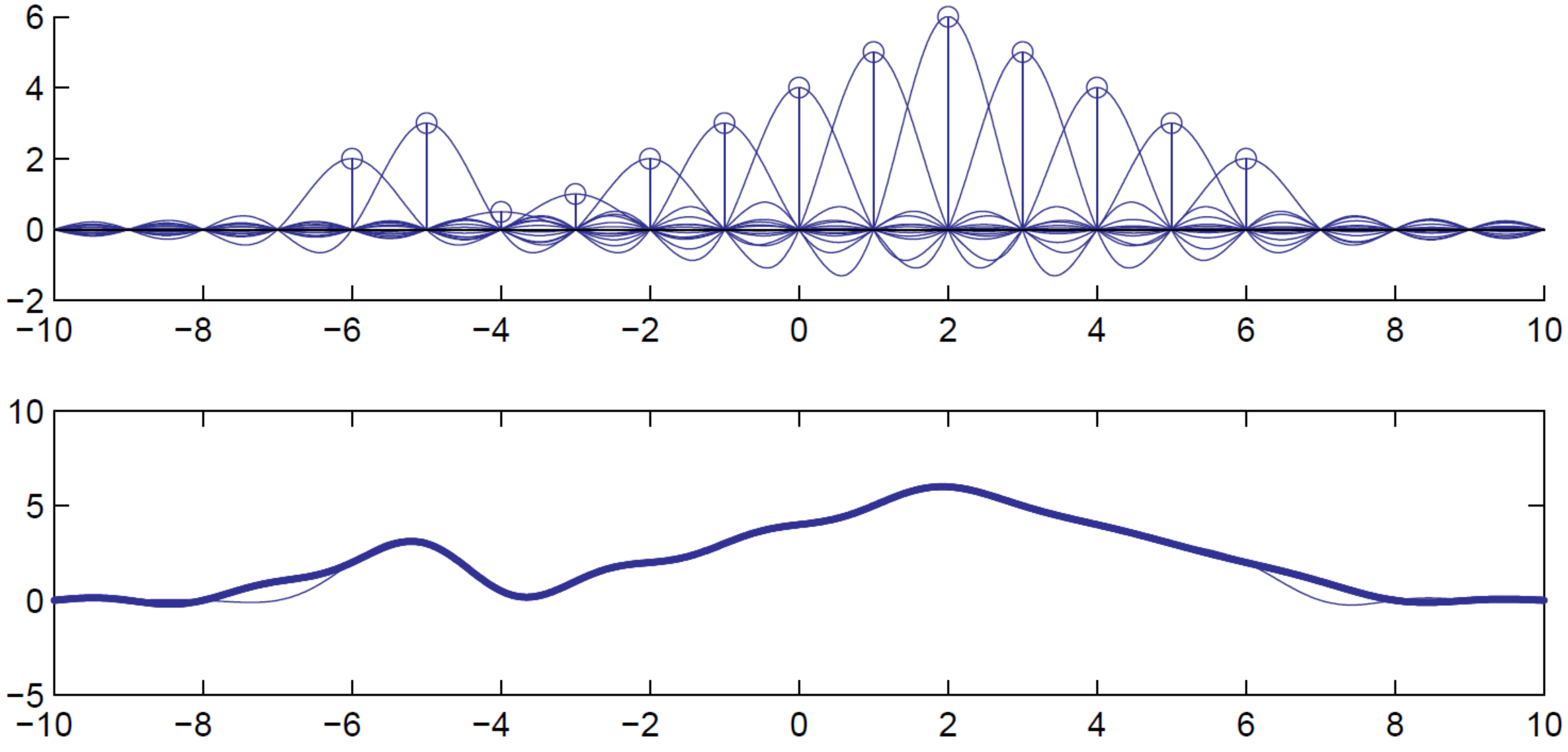
# Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\text{sinC}[\pi(t-n)]$ ou son équivalent en $L^2$ sont dites de reconstruction parfaite ou idéale



# Reconstruction parfaite

La formule $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \mathrm{sinC}[\pi(t-n)]$ ou son équivalent en $L^2$ sont dites de reconstruction parfaite ou idéale



# Autres reconstructions

Reconstruction parfaite :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathrm{sinC}[\pi(t-n)]$$

Problèmes :

- Le $\mathrm{sinC}$ est non-causal
- Le $\mathrm{sinC}$ a support infini
- La somme est sur un nombre infini de termes

Et si on remplace le $\mathrm{sinC}$ par une fonction à support fini ?

# Autres reconstructions

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)h(t-n)$$

Si $h$ a support fini, la somme est finie, et à moins d'un retard, on peut utiliser des fonctions non causales… mais il peut y avoir une erreur de reconstruction

$\mathbf{sinC}$ **tronquée** : $h(t) = \mathrm{sinC}(t)\mathbb{I}_{(-T,T)}(t)$

L'erreur décroit comme $1/T$

# Autres reconstructions

**Interpolation polynomiale** : on utilise des polynômes qui passent par $f(n)$ aux instants $n$

**Interpolation d'ordre zéro** : $h(t) = h_0(t) = \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(t)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) h_0(t-n) \Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \left[m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right], g(t) = f(m)$$

# Autres reconstructions

**Interpolation d'ordre 1** :

$$h(t) = h_1(t) = (h_0 * h_0)(t) \; = (1 - |t|)\mathbb{I}_{[-1,1]}(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) h_1(t - n)$$

Soit $\theta = t - m.$ On a :

$$\forall t \in [m, m+1], \theta \in [0,1]$$

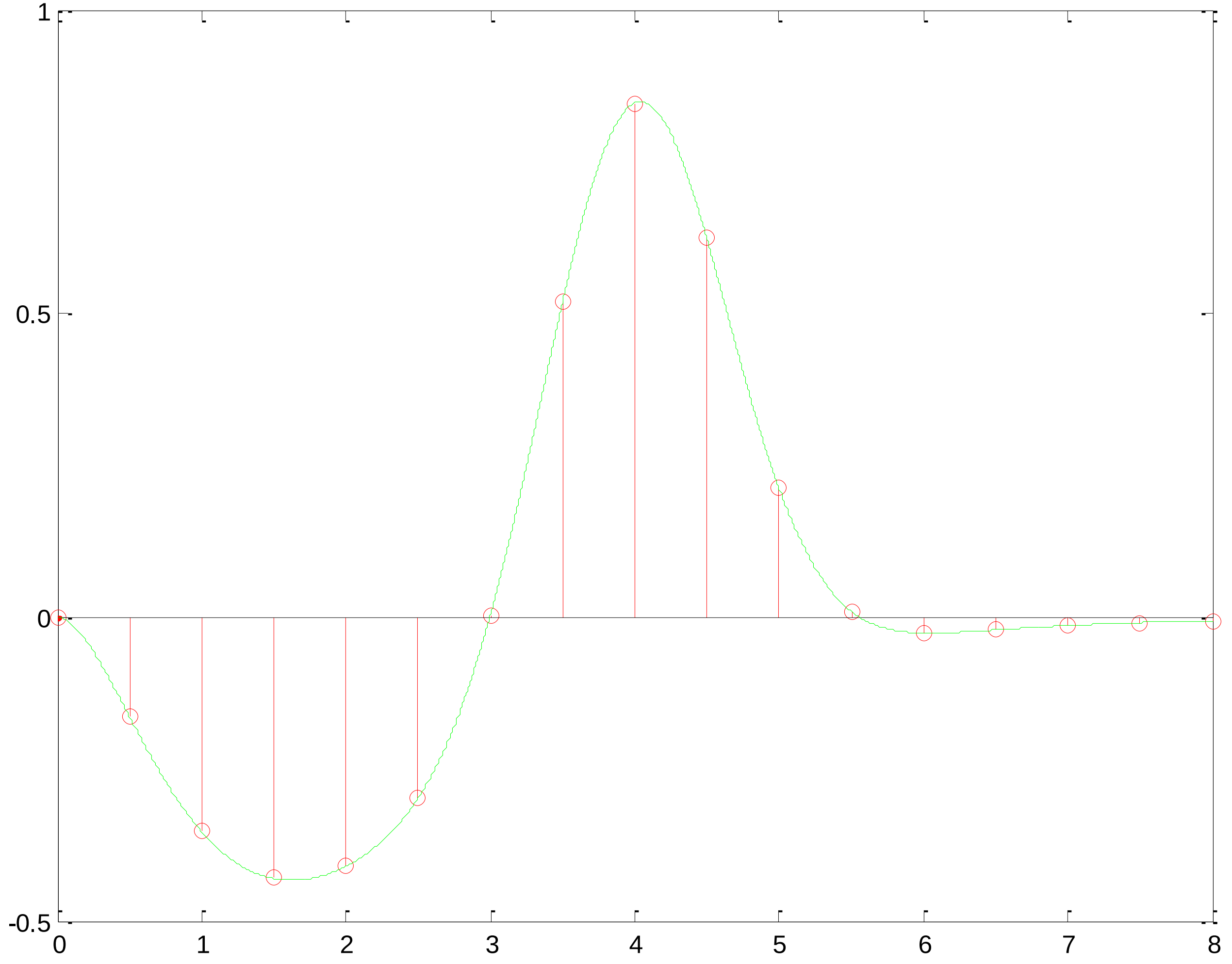
$$\begin{aligned} g(t) &= f(m)h_1(t - m) + f(m+1)h_1(t - m - 1) \\ &= f(m)h_1(\theta) + f(m+1)h_1(\theta - 1) \\ &= (1 - \theta)f(m) + (1 + \theta - 1)f(m+1) \\ &= f(m) + \theta[f(m+1) - f(m)] \end{aligned}$$

# Autres reconstructions

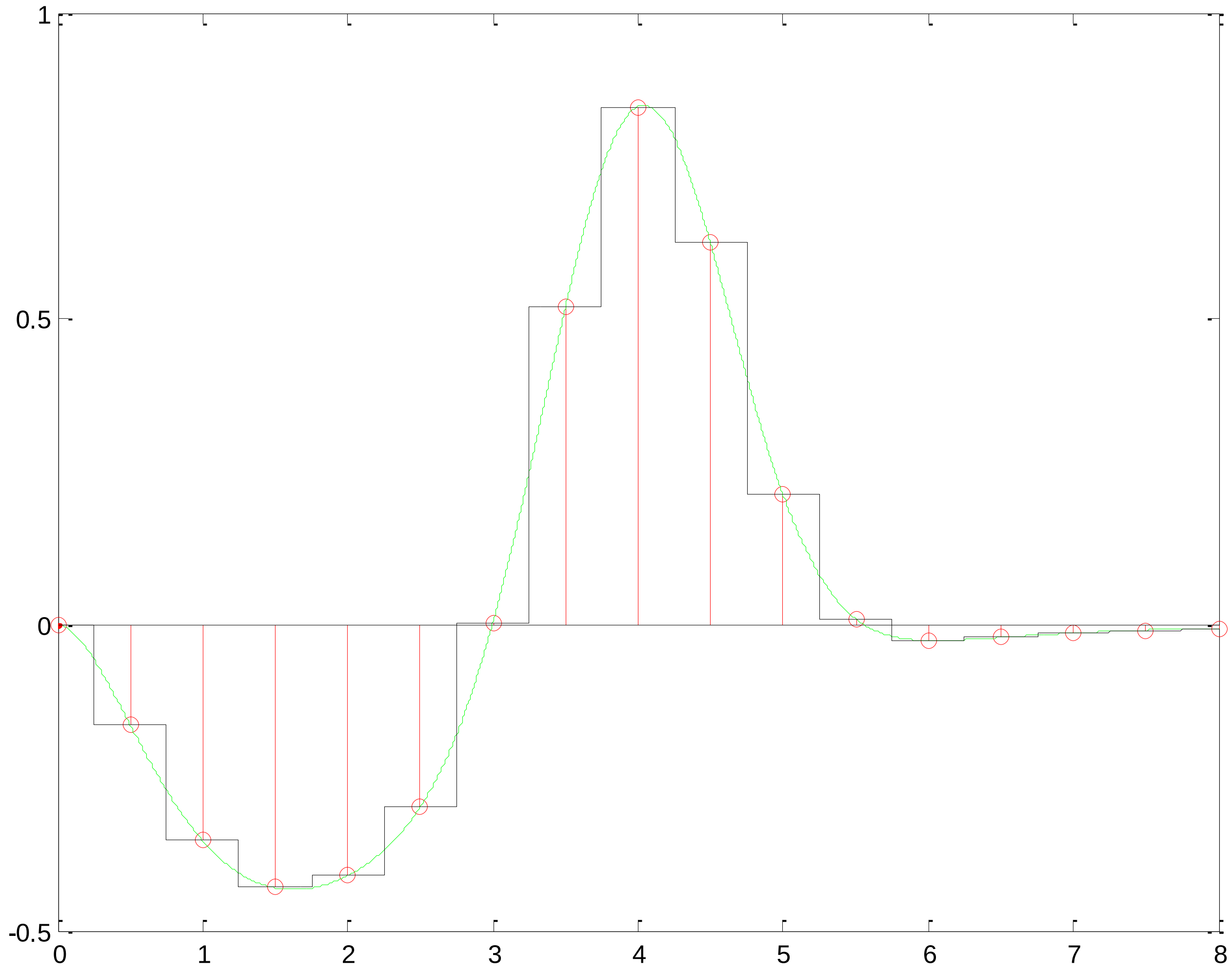
On peut montrer que :

- $\forall m \in \mathbb{N}$, si on prends $m \geq 1$ convolutions de $h_0$ on obtient un noyau d'interpolation d'ordre $m$, c'est-à-dire, la formule d'interpolation produit un signal $\mathcal{C}^{(m-1)}$ polynomial par morceaux d'ordre $m$ qui passe par les points $\big(n, f(n)\big)$
- Les noyaux $h_m$ sont appelés B-spline
- $h_m \to \mathrm{sinC}^{\pi}$ pour $m \to \infty$

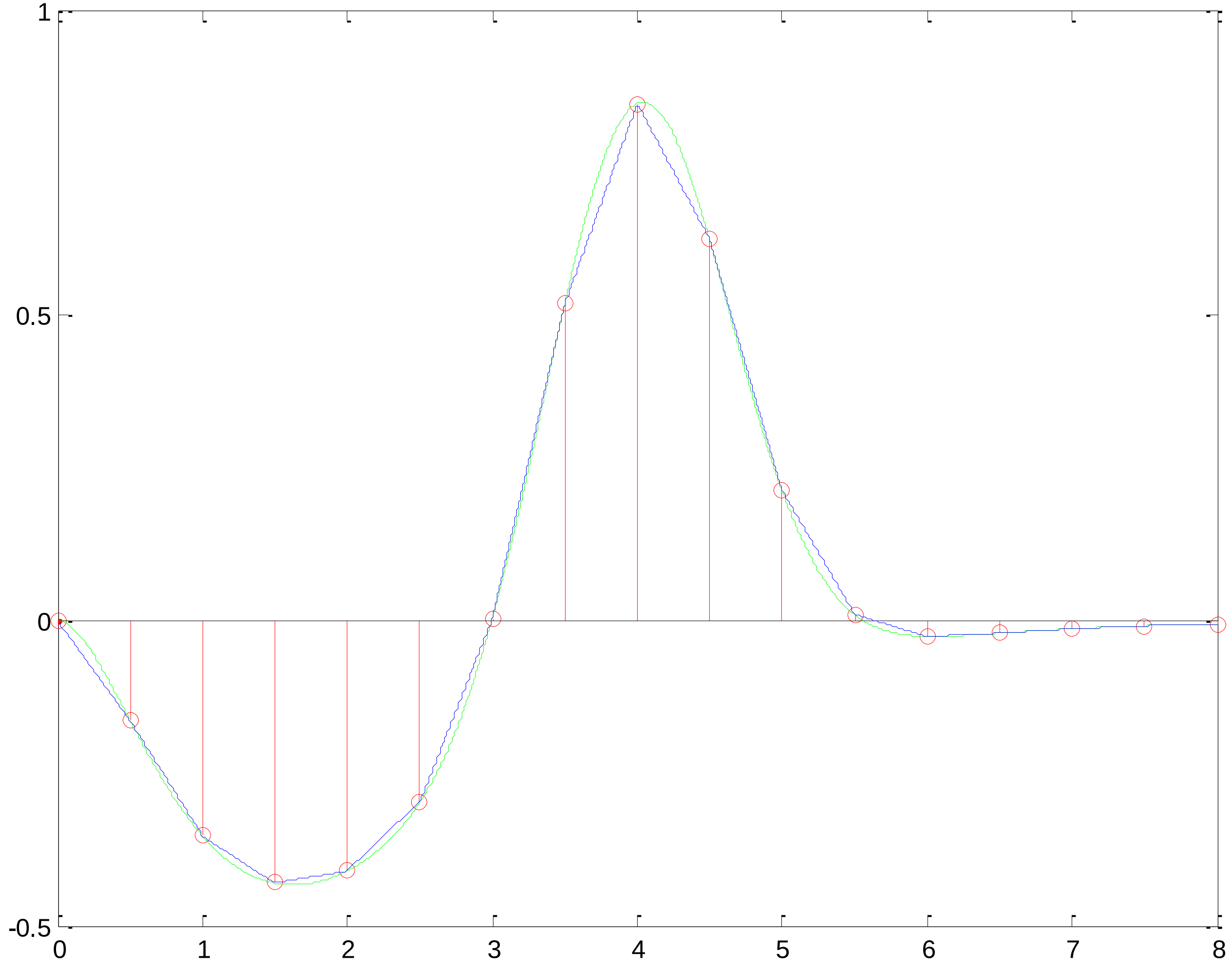
# Autres reconstructions



# Autres reconstructions



# Autres reconstructions



# Erreur de reconstruction

$f$ satisfait Poisson et a spectre à support dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$g(t)=\sum_n f(n)h(t-n)$ et

$\hat{g}(\nu)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\hat{h}(\nu)e^{-2i\pi\nu n}=\boxed{\hat{h}(\nu)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\nu+m)}$

$\|f-g\|_2^2=\left\|\hat{f}-\hat{g}\right\|_2^2=$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\left|\hat{f}(\nu)-\hat{g}(\nu)\right|^2 d\nu+\sum_{n\neq 0}\int_{n-1/2}^{n+1/2}\left|\hat{f}(\nu)-\hat{g}(\nu)\right|^2 d\nu$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\left|\hat{f}(\nu)\right|^2\left|1-\hat{h}(\nu)\right|^2 d\nu+\sum_{n\neq 0}\int_{n-1/2}^{n+1/2}|\hat{g}(\nu)|^2 d\nu$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\left|\hat{f}(\nu)\right|^2\left|1-\hat{h}(\nu)\right|^2 d\nu+\sum_{n\neq 0}\int_{-1/2}^{+1/2}|\hat{g}(\nu-n)|^2 d\nu$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\left|\hat{f}(\nu)\right|^2\left|1-\hat{h}(\nu)\right|^2 d\nu+\sum_{n\neq 0}\int_{-1/2}^{+1/2}\left|\hat{h}(\nu-n)\hat{f}(\nu)\right|^2 d\nu$$

# Erreur de reconstruction

$$\|f-g\|_2^2 =$$
$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 \left|1-\hat{h}(\nu)\right|^2 d\nu + \int_{-1/2}^{+1/2} \left|\hat{f}(\nu)\right|^2 \sum_{n\neq 0} \left|\hat{h}(\nu-n)\right|^2 d\nu$$

Reconstruction idéale : $\hat{h}(\nu) = 1$ en bande principale et nul sur les répliques

Le $\mathrm{sinC}$ satisfait ces conditions

# Meilleure reconstruction

Soit $f \in L^2$ **non bornée en bande**

Soit $g(t) = \sum_n u_n \operatorname{sinC}[\pi(t-n)]$ un **CNA idéal**

Quel est le choix de $u_n$ qui minimise $\|f-g\|_2^2$ ?

# Meilleure reconstruction

Soit $f_B = f * \mathrm{sinC}^{\pi} \in L^2$ : limitée en bande

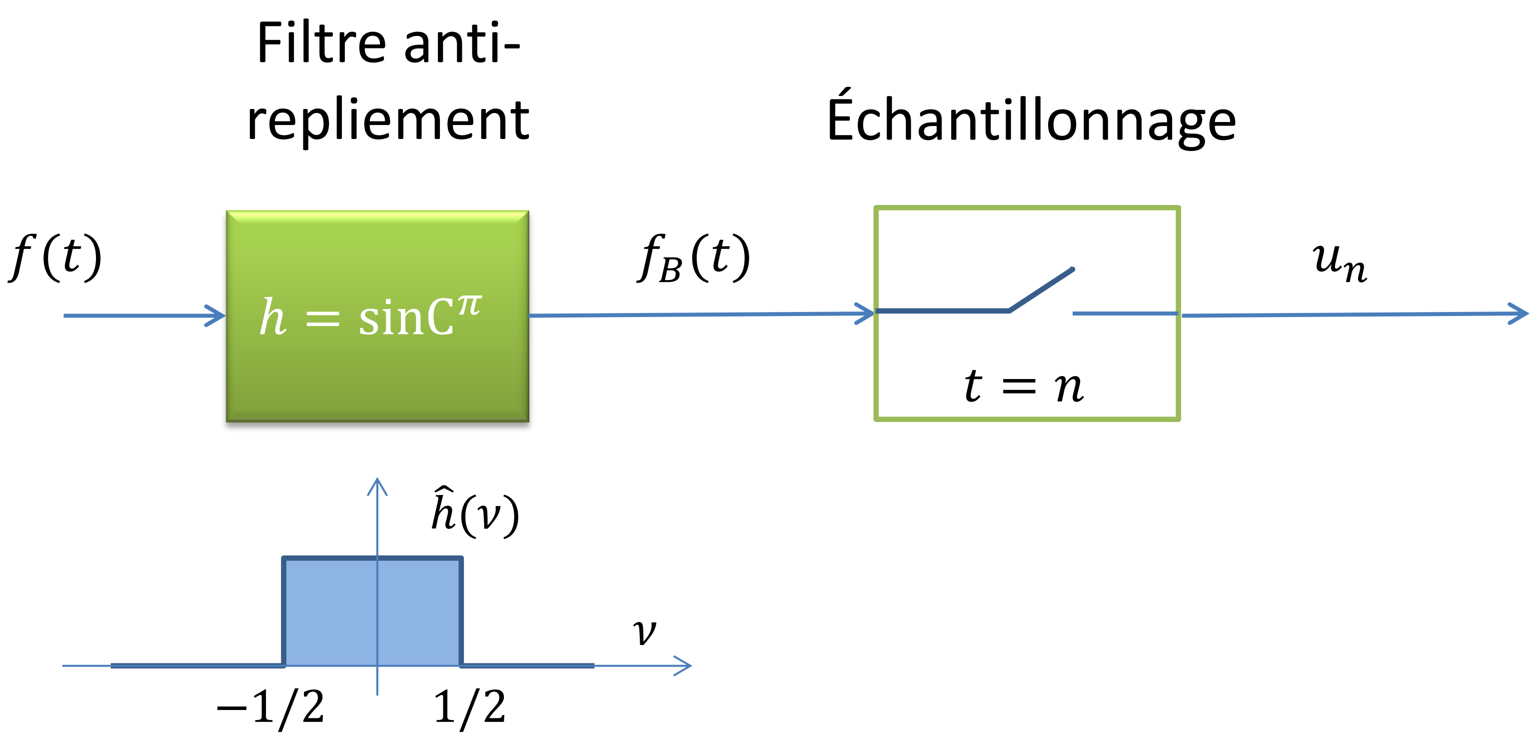
Soit $f_H = f - f_B$ c'est-à-dire, $f = f_H + f_B$

Pour tout $g$ exprimable comme somme de $\mathrm{sinC}$ (donc limitée en bande), on a

$$\|f-g\|_2^2 = \left\|\hat{f}-\hat{g}\right\|_2^2 = \left\|\hat{f}_H+\hat{f}_B-\hat{g}\right\|_2^2$$
$$= \left\|\hat{f}_H\right\|_2^2 + \left\|\hat{f}_B-\hat{g}\right\|_2^2 + 2\langle \hat{f}_H, \hat{f}_B-\hat{g}\rangle =$$
$$= \left\|\hat{f}_H\right\|_2^2 + \left\|\hat{f}_B-\hat{g}\right\|_2^2 = \|f_H\|_2^2 + \|f_B-g\|_2^2$$

Comme $f_B$ et $g$ satisfont les HP de Shannon, $g(n) = f_B(n)$ est le choix optimale, ce qui implique $u_n = f_B(n)$

# Chaîne d'echantillonnage



# Normalisation

Si on veut échantillonner $f$ avec période $T_e$, on introduit $g(x) = f(T_e x)$

La fonction $g$ est échantillonnée avec période 1, donc

1. $\forall |\nu| > \frac{1}{2}, \hat{g}(\nu) = 0$
2. $g(x) = \sum_n g(n) \mathrm{sinC}[\pi(x-n)]$
3. $\sum_m g(m) e^{-2i\pi\nu m} = \sum_n \hat{g}(\nu + n)$

On écrit cela en se rappelant que:

$$g(x) = f(T_e x) \qquad f(x) = g\left(\frac{x}{T_e}\right)$$

$$\hat{g}(\nu) = \frac{1}{T_e}\hat{f}\left(\frac{\nu}{T_e}\right) \qquad \hat{f}(\nu) = T_e \hat{g}\left(\frac{\nu}{F_e}\right)$$

# Normalisation

On obtient

1. $\hat{f}(\nu) = T_e \hat{g}\left(\frac{\nu}{F_e}\right) = 0 \ \forall \frac{|\nu|}{F_e} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\nu| > \frac{F_e}{2}$
2. $f(t) = g(t/T_e) = \sum_n g(n) \mathrm{sinC}\left[\pi\left(\frac{t}{T_e} - n\right)\right] f(t) = \sum_n f(nT_e) \mathrm{sinC}\left[\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)\right]$
3. $\sum_m f(mT_e) e^{-2i\pi\nu m} = \frac{1}{T_e} \sum_n \hat{f}\left(\frac{\nu + n}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_n \hat{f}[F_e(\nu + n)]$

# Chaîne d’échantillonnage

- Chaîne de numérisation : filtre idéal à $F_e/2$ et reconstruction avec $\mathrm{sinC}^{\pi/T_e}$